Handbuch

der

reinen Mathematik

von

Heinrich August Rothe,

außerordentl. Prof. der Philosophie zu Leipzig, wie auch der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Correspondent.

Ersten Bandes Erster Theil.

Arithmetik.

Leipzig,

bei Johann Ambrosius Barth,

1804.

Systematisches

Lehrbuch der Arithmetik

abgefaßt

von

Heinrich August Rothe,

außerordentl. Prof. der Philosophie zu Leipzig, wie auch der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Correspondent.

Erster Theil.

Leipzig,
bei Johann Ambrosius Barth,
1804.

Vorrede.

Meine Absicht bey der Ausarbeitung dieses Lehrbuches war, die Sätze der Elementararithmetik, die dem ganzen vielumfassenden Gebäude der ganzen Mathematik zum Grunde liegen, mit sorgfältigster Beobachtung der mathematischen Methode in einem systematischen Zusammenhange darzustellen. Es sollte demnach dieses Buch, dem ich deshalb den Titel eines systematischen Lehrbuchs gegeben habe, für den gegenwärtigen Zustand der Arithmetik ohngefähr das werden, was Euklids Elemente für den damaligen Zustand der Arithmetik und Geometrie waren.

Zu Erreichung dieser Absicht habe ich den ganzen Hauptinhalt desselben in Erklärungen, Grundsätze, Lehrsätze, und Aufgaben nebst zugehörigen Beweisen und Zusätzen abgetheilt. Was die von mir gebrauchte, gewöhnlich nicht vorkommende Gattung von Sätzen, die ich unter dem Namen Bemerkungen aufgeführt habe, betrift, so sind dieses, wie auch das Wort schon zeigt, nichts and rs als Betrachtungen, die sich aus den vorigen Lehren ergeben, und durch deren Verwebung in das Ganze die durch die mathematische Methode beabsichtigte Strenge und Gewißheit nicht im geringsten leidet, die aber doch von den ebenfalls hin und wieder vorkommenden Anmerkungen verschieden sind. Heischesätze oder Postulate kommen hier nicht vor, denn die allererste Aufgabe (I. Kap. 5.) erfordert weiter nichts, als daß ma schreiben kann. Diejenigen Wahrheiten, die man gewöhnlich unter dem Namen der Grundsätze oder Axiome in den mathematischen Lehrbüchern aufzuführen pflegt, wie z. B. „eine jede Größe ist sich selbst gleich,“ oder: „das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich,“ desgleichen: „wenn zwo Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter

sich gleich,« und so mehrere, habe ich, als zu offenbar, besonders aufzustellen nicht für nöthig gehalten; dagegen finden sich andere Sätze unter diesem Namen aufgeführt, die sich dazu qualificiren, das heißt, so einfach und einleuchtend sind, daß sie nicht weiter bewiesen werden können; immer aber habe ich mir zum unverbrüchlichen Gesetze gemacht, keinen Satz, sey er auch noch so einleuchtend und einfach, unter dieser Benennung aufzustellen, der sich auf andere, noch einfachere Sätze gründet, und also bewiesen werden kann. Hieher gehören z. B. die zu Ende des dritten Kapitels aufgestellten allgemeinen Sätze von Summen und Differenzen, worüber nachher noch Einiges erinnert werden soll.

Die strenge Beobachtung der mathematischen Methode nöthigte mich, die Sätze in einer solchen Ordnung aufzuführen, daß nicht nur jeder an seinem Orte ganz verständlich ist, sondern auch die Prämissen zu den auf das schärfste zu führenden Beweisen in den vorhergehenden Sätzen vollständig zu finden sind, und bey der Auflösung einer Aufgabe nichts gefordert werden darf, dessen Möglichkeit und Bewerkstelligungsart nicht schon in einer andern vorhergehenden Aufgabe gezeigt worden, oder nicht ohne Bedenken vorausgesetzt werden kann. Letzteres ist der Fall bey den allerersten Aufgaben des ersten Kapitels, welche nichts weiter voraussetzen, als daß man schreiben und sprechen kann; und diese Forderung darf man doch an jeden machen, der rechnen lernen will. Dabey mußte ich auch vollständiger seyn, als gewöhnlich zu geschehen pflegt, und Sätze, die man sonst gar nicht ausdrücklich aufstellt, die aber doch in der Folge häufig genug gebraucht werden, wie z. B. die Sätze im vierten Kapitel, welche die Eigenschaften von Producten aus mehrern Factoren betreffen, an den gehörigen Orten mit aufnehmen.

Die Einleitung enthält blos Erklärungen von den ersten Grundbegriffen der Mathematik, von der Art Größen durch Zahlen auszudrücken, von der Arithmetik und den vier Specien derselben. Bey letztern ist bemerkt worden, wie die dabey vorkom-

kommenden Größen in Rücksicht ihrer Gattung beschaffen seyn müssen. Außer der in (16.) gegebenen Definition von Division, welche ich die erste nenne, pflegt man noch folgende andere aufzustellen: »Dividiren heißt untersuchen, wievielmal eine gegebene Größe, die der Divisor heißt, in einer andern gegebenen Größe, die der Dividend genannt wird, enthalten ist; die zu suchende Zahl heißt der Quotient.« Auf die erste Definition paßt der Name der Species Division, auf die zweyte aber der Name dessen, was durch sie gefunden wird, Quotient. Daß diese beyden Definitionen nicht einerley sind, fällt in die Augen; denn wenn der Dividend nicht eine unbenannte Zahl ist, so muß nach der ersten Definition der Divisor eine unbenannte, der Quotient aber eine benannte, mit dem Dividend gleichartige Größe, nach der andern aber der Divisor eine benannte mit dem Dividend gleichartige Größe, und der Quotient eine unbenannte Zahl seyn. Nur wenn der Dividend eine unbenannte Zahl ist, ist es in Rücksicht des Resultats einerley, welche von beyden Definitionen man zum Grunde legt. Dieses muß aber erst bewiesen werden; also wäre es doch in der That besser gewesen, zwo ganz verschiedene Operationen nicht mit einerley Namen zu belegen; ich habe in dieser Rücksicht diese beyden Definitionen in der Folge genau unterschieden, auch hin und wieder für letztere ein eigenes Zeichen, nämlich das Semicolon, gebraucht, und dagegen das gewöhnliche Divisionszeichen oder das Colon für die erstere beybehalten.

Das erste Kapitel enthält die Lehren, die gewöhnlich zur Numeration gerechnet werden. Der in (4.) enthaltene willkührliche Satz zeigt nichts anders, als daß man ganze Zahlen nach der getroffenen Uebereinkunft durch eine, oder Verbindung mehrerer Ziffern bezeichnen und ausdrücken könne, läßt aber noch unentschieden, ob auf diese Art jede ganze Zahl geschrieben werden kann, und ob es möglich sey oder nicht, eine und dieselbe ganze Zahl auf mehr als eine Art auszudrücken. Die erste Frage entscheidet die Auflösung der in (5.) ent-

enthaltenen Aufgabe, welche, wie bereits vorhin erwähnt worden, nichts weiter voraussetzt, als daß man schreiben kann; sie ist derohalb rein combinatorisch, und zeigt zugleich auf das einleuchtendste, wie zeitig combinatorische Operationen in der Arithmetik vorkommen. Ich habe die Auflösung dieser Aufgabe als der ersten in diesem Kapitel, so wie in dem ganzen Systeme, ausführlich in drey Fällen aus einander zu setzen für nöthig gehalten, wovon aber der dritte auf den zweyten zurückgebracht werden kann, wenn man nach [4. 2) Zus.] der vorher gegebenen, mit lauter Neunen geschriebenen Zahl zur Linken eine Null vorgesetzt denkt. Der zweyte Zusatz enthält den Beweis, daß zwo verschieden ausgedrückte ganze Zahlen auch verschiedene Werthe haben müssen, und zugleich die Merkmale, nach denen man beurtheilen kann, welches die größere und kleinere ist; und so entscheidet sich die zweyte Frage. So wie die Aufgabe selbst eine Zahl um eine gewöhnliche Einheit erhöhen lehrt, so zeigt der zugehörige dritte Zusatz, wie man eine geschriebene Zahl um eine Einheit jeder verlangten höhern Ordnung erhöhen kann; der Beweis ist ganz derselbe wie vorhin, darum habe ich ihn nicht noch einmal wiederholt.

Der in (6.) enthaltene erste Lehrsatz dieses Kapitels, so wie des ganzen Systems, soll hoffentlich verständlich seyn. Außerdem, daß er in dem folgenden zweyten Kapitel zum kurzen Beweise eines andern Lehrsatzes gebraucht wird, dient er auch, um die in dem ersten Kapitel nun folgenden Vorschriften zur Aussprache geschriebener Zahlen zu rechtfertigen. Diese, so wie die umgekehrte Aufgabe, ausgesprochene Zahlen zu schreiben, werden gewöhnlich zur Numeration mitgerechnet; daher habe ich sie nicht übergangen, sondern in den Sätzen von (8.) bis (13.) vollständig aus einander gesetzt: genau genommen gehören aber diese Regeln mehr in die Grammatik als Arithmetik, man kann sie daher ohne Nachtheil überschlagen. Dagegen haben sich Anfänger die in (14.) enthaltenen ersten Begriffe von Ordnungsexponenten

und deren Gebrauche, der in der Folge noch mehr erweitert werden wird, desto sorgfältiger bekannt zu machen. Die Aeußerung zu Ende dieses Kapitels über das duodecadische System wird man hoffentlich nicht falsch verstehen, oder glauben, daß ich dadurch dem berüchtigten Taun Systeme des D. Werneburg das Wort reden wolle. Ich habe nichts weiter sagen wollen, als daß es vielleicht besser gewesen wäre, wenn man statt des dekadischen Systems gleich anfangs das duodecadische eingeführt hätte. Dagegen bin ich vollkommen überzeugt, daß das Unternehmen, das letztere jetzt noch einführen zu wollen, der dabey statt findenden Schwierigkeiten und Hindernisse wegen unausführbar ist, und Nachtheile hervorbringen würde, die gegen die davon zu erwartenden Vortheile in gar keinem Verhältnisse stehen würden.

Da nach (Einl. 8.) unbenannte ganze Zahlen blos Kennzeichen sind, wie Größen aus einer angenommenen Einheit entstehen, und ein Kennzeichen keine Größe ist: so sind auch unbenannte Zahlen im strengsten Sinne keine Größen, und können demnach auch nicht addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden. Wenn man aber gleichwohl diese vier Species der Arithmetik mit unbenannten Zahlen verrichtet, und sie also als Größen betrachtet, so geschieht dies blos in dem Sinne, den die Grundsätze und darauf folgenden Erklärungen, mit denen die folgenden vier Kapitel anfangen, angeben. Jedes dieser Kapitel enthält zugleich die Erklärung der für die darin abgehandelte Species eingeführten mathematischen Bezeichnung, und das folgende zweyte noch überdies die Erklärung der zur Bezeichnung der Gleichheit und Ungleichheit eingeführten Zeichen, so wie der Wörter Gleichung, und Glieder einer Gleichung.

In dem zweyten Kapitel, worin die Addition unbenannter Zahlen abgehandelt wird, bin ich von den einfachsten Aufgaben, worin die Verfertigung des Einsundeinses und dessen Gebrauch gelehrt wird, nach und nach bis auf die zu-

sam-

sammengesetzteste, worin die Addition mehrerer vielziffriger Zahlen gezeigt wird, fortgegangen. Den in [10. 2) Zus.] angegebenen Rechnungsvortheil habe ich in der Ausübung sehr leicht und nützlich befunden.

Bey der im dritten Kapitel vorgetragenen Subtraction unbenannter Zahlen habe ich das Unterwärtsborgen brauchen gelehrt, weil ich selbiges für kürzer halte als das Oberwärtsborgen, das gewöhnlich dabey angewendet wird, indem man den, bey diesem besonders zu betrachtenden Fall, wenn man über Nullen wegborgen muß, bey jenem nicht besonders in Betrachtung zu ziehen nöthig hat.

Die Buchstabenrechnung, oder die Art, wie man sich der Buchstaben und Gleichungen in der Mathematik bedient, um allgemeine Wahrheiten kurz auszudrücken und aufzufinden, habe ich nicht, wie gewöhnlich zu geschehen pflegt, in einem eigenen Kapitel abgehandelt, sondern im Gegentheil für dienlich gehalten, den Anfänger, der sich dieses Lehrbuchs bedienen will, gelegentlich und zwar bald mit derselben bekannt zu machen. Die im dritten Kapitel nun folgenden allgemeinen Sätze von Summen und Differenzen enthalten die ersten und einfachsten Anwendungen derselben, und man findet hier Beyspiele, theils wie man allgemeine Sätze und Wahrheiten aus ihrem wörtlichen Ausdrucke in die weit kürzern durch Buchstaben und Gleichungen, und umgekehrt aus diesen in jenen übertragen, theils aber auch, wie man aus dergleichen allgemeinen durch Buchstaben und Gleichungen ausgedrückten Sätzen andere von selbst finden und ableiten kann. Bey der ersten Bearbeitung dieses Lehrbuches hatte ich einige dieser Sätze, welche mir vorzüglich einfach vorkamen, wörtlich als Grundsätze aufgestellt, und einige andere, die ich in der Folge auch brauchte, und die mir minder einfach schienen, aus jenen als Lehrsätze abgeleitet, bewiesen, und in Buchstaben und Gleichungen ausgedrückt. Bey einer genauern Betrachtung fand ich aber, daß sie alle unter sich, und mit noch einigen andern von

glei-

gleicher Einfachheit und Deutlichkeit, auf die ich anfangs nicht einmal gefallen war, weil ich sie nicht brauchte, zusammenhängen, und unter sich ein vollständiges Ganze bilden. Dies änderte meinen Plan, und ich suchte daher alle diese Gleichungen von einerley Gattung erst vollständig auf, und ordnete sie so unter einander, wie ich glaubte, daß jeder folgende aus den vorhergehenden am leichtesten und natürlichsten abgeleitet werden könnte. Alle diejenigen allgemeinen Sätze von Summen und Differenzen, bey denen nur zwey verschiedene allgemeine Größen oder Buchstaben in Betrachtung kommen, habe ich in (6.) vollständig zusammengestellt. Es giebt deren nur drey, davon sind die ersten beyden unter I und II blos Folgerungen aus der (in Einleitung 14.) gegebenen Definition von Subtraction, und der dritte III eine Folge von den beyden ersten; ich hatte also bey der Ableitung dieses Satzes aus den beyden vorigen die schönste Gelegenheit, an einem äußerst einfachen Beyspiele zu zeigen, wie man aus zwey durch Buchstaben und Gleichungen ausgedrückten Sätzen einen dritten von selbst ableiten und finden kann. Alle Sätze, die in (7.) sowohl durch Buchstaben und Gleichungen, als auch wörtlich ausgedrückt vorkommen, enthalten drey verschiedene allgemeine Größen oder Buchstaben, und haben noch außerdem dies mit einander gemein, daß jede Gleichung jeden dieser drey verschiedenen Buchstaben zweymal, und noch zwey Paar Klammern enthält, und in jedem Paar Klammern zwey verschiedene Buchstaben vorkommen. Man kann diese sämmtlichen Gleichungen unter zwo Gattungen bringen; die Gleichungen II bis VII gehören zur ersten Gattung, und enthalten auf der einen Seite des Gleichheitszeichens zwey verschiedene Buchstaben, und gar keine Klammern, auf der andern Seite dagegen vier Buchstaben und zwey Paar Klammern; die Gleichung I und die Gleichungen von VIII bis XIIII gehören hingegen zur zweyten Gattung, und enthalten auf jeder Seite des Gleichheitszeichens alle drey verschiedene Buchstaben, und ein Paar

Klam-

Klammern. Vielleicht wird mir Mancher einwerfen, daß die Menge dieser in (7.) aufgestellten Gleichungen zu groß sey, und der Anfänger sie nicht alle auf einmal fassen und im Gedächtniß behalten könne. Auf das Erste antworte ich, daß ich bey der Absicht, diese Gleichungen, die unter sich ein zusammenhängendes Ganzes bilden, vollständig aufzuführen, weder mehr noch weniger aufstellen konnte, als es der Natur der Sache nach giebt. Was den zweyten Punct anbetrifft, so haben Anfänger, denen diese Sätze (die übrigens so einfach und einleuchtend sind, daß sie fast sämmtlich als Grundsätze gelten können), zu langweilig und zu trocken vorkommen, auch nicht nöthig, sie alle auf einmal durchzugehen; vielmehr rathe ich ihnen, die Gleichungen VIII bis XIII, die erst späterhin angewendet werden, so lange bey Seite zu setzen, bis sie weiter unten vorkommen; die vorhergehenden Gleichungen, vorzüglich die der ersten Gattung, die zeitiger angewendet werden, habe ich hoffentlich so zusammengestellt und aus einander abgeleitet, daß ich glauben darf, der Anfänger könne sehr bald mit ihnen fertig werden. Die beyden Sätze oder Gleichungen in (8.) lehren, wie man Differenzen addiren und subtrahiren könne, und werden sehr häufig, und schon im folgenden Kapitel angewendet. Vorzüglich dienen diese aufgestellten Sätze von Summen und Differenzen, wenn man zusammengesetzte Ausdrücke, dergleichen im zehnten Kapitel vorkommen, addiren und subtrahiren will. Man pflegt ihre Richtigkeit gewöhnlich aus der Lehre von den entgegengesetzten Größen darzuthun; allein ich kann dieses nicht billigen, weil dadurch etwas Einfacheres und Leichteres auf etwas Dunkleres und Schwereres begründet wird; vielmehr bin ich der Meinung des Herrn Prof. Klügel *), welcher für nöthig hält, diese Sätze ganz unabhängig von der Lehre von den entgegenge-

*) Archiv für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C. F. Hindenburg. Drittes Heft S. 309 u. f. Viertes Heft S. 470 u. f.

setzten Größen blos aus der Natur der Addition und Subtraction abzuleiten, und dagegen umgekehrt die Lehre von den entgegengesetzten Größen auf diese Sätze zu gründen. Diese Ursachen haben mich bewogen, von dem gewöhnlichen Vortrage hier abzuweichen, und diese Sätze in einer systematischen Ordnung vollständig aufzustellen. Ueber die dabey statt findenden Einschränkungen, wenn man sich selbige durch Beyspiele erläutern will, sehe man den Anhang.

Der in dem folgenden vierten Kapitel, worin die Multiplication unbenannter Zahlen vorgetragen wird, unter (5.) aufgestellte Lehrsatz, nebst den ersten drey zugehörigen Zusätzen, gehört mit zu denen, die, ohnerachtet sie längst bekannt und von häufiger Anwendung sind, doch gewöhnlich nicht ausdrücklich aufgestellt und bewiesen werden; und doch ist es nöthig, wenn man ihn allgemein auf Producte, wo der Multiplicand nicht blos eine unbenannte Zahl, sondern eine Größe jeder Art seyn kann, erstrecken will, zu zeigen, daß er sowohl dann, wenn der Multiplicator, als auch wenn der Multiplicand eine Summe oder Differenz ist, wahr sey. Bey dem Beweise des vierten Zusatzes, worin die Regel, eine Differenz mit einer Differenz zu multipliciren, oder das Product zweyer Differenzen wieder durch eine Differenz auszudrücken, enthalten ist, ist der letzte von den im vorigen Kapitel aufgestellten allgemeinen Sätzen von Summen und Differenzen angewendet worden. Man übersieht hieraus den Grund der anfangs auffallenden Regel, welche gewöhnlich so ausgedrückt wird, daß — mit — multiplicirt + giebt, und die also hier unabhängig von der Lehre von den entgegengesetzten Größen dargethan wird; im Gegentheil wird in der Folge die Regel, entgegengesetzte Größen zu multipliciren, auf diesen Satz gegründet. Die folgenden Sätze von (6.) bis (10.) enthalten die Regeln der wirklichen Multiplication mit Zahlen. Producte aus mehreren Factoren kommen sehr häufig vor; gleichwohl pflegt man

die sie betreffenden Sätze von (11.) bis (14.), so bekannt sie auch sind, und so häufig man auch von ihnen Gebrauch macht, niemals ausdrücklich aufzustellen und zu erweisen, sondern immer stillschweigend vorauszusetzen; diese Lücke durfte in einem systematischen Lehrbuche nicht statt finden. In (15.) habe ich die bey der Multiplication stattfindenden Rechnungsvortheile, die mir die beträchtlichsten schienen, etwas umständlicher, als gewöhnlich zu geschehen pflegt, aus einander gesetzt. Solche Vortheile sind nicht zu verachten, sondern bilden gute praktische Rechner. Der erste unter A) gründet sich auf die vorhergehenden Lehren von Producten aus mehrern Factoren, und ist gerade der unbeträchtlichste; die folgenden unter B) C) D) und E) sind aber desto beträchtlicher, und erfordern nichts als eine kleine Uebung, um sich das Verfahren dabey gleichsam mechanisch zu machen; auch kann man, um sich dabey nicht zu verirren, noch mancherley Hülfsmittel anwenden, deren umständliche Auseinandersetzung unnöthig war.

Bey der Division unbenannter Zahlen, die im fünften Kapitel vorgetragen wird, ist es eine Hauptsache, daß man die in (4.) und (6.) aufgestellten Vorbereitungsaufgaben leicht und geschwind aufzulösen wisse. Ist A eine einziffrige Zahl, so ergiebt sich die Auflösung derselben, wie in (4.) gezeigt wird, schon aus dem Einmaleins; kann man daher dieses auswendig, so ist man auch nach den in (5.) angegebenen Vorschriften im Stande, eine vielziffrige Zahl durch einen einziffrigen Divisor zu dividiren. Dies muß man an verschiedenen Beyspielen so lange üben, bis man sich die [Ebend. 3) Zus.] verlangte Fertigkeit erworben hat, vermittelst deren man nun in den Stand gesetzt wird, die Vorbereitungsaufgabe auch für den Fall auflösen zu können, wenn A eine vielziffrige Zahl ist, und wozu die Vorschriften nebst mehrern Beyspielen in (6.) enthalten sind, und mithin nach den in (7.) enthaltenen Regeln auch eine vielziffrige Zahl

durch

durch eine andere dividiren kann. Der im vierten Zusatz zu (7.) angegebene Vortheil zu geschwinderer Berechnung des Quotienten gewährt, wenn er nicht ohne Ursache, sondern nur in den angegebenen Fällen angewendet wird, beträchtliche Abkürzung, und erfordert nur einige Aufmerksamkeit, sonst ist er nicht schwierig. Ich hatte mir ihn bey vielen großen Divisionen, die ich manchmal zu verrichten hatte, ausgedacht, und seines Nutzens wegen in diesem Lehrbuche mit vorgetragen. Den Beweis dazu, der sich in der Kürze nicht geben ließ, und auch als eine Nebensache füglich übergangen werden konnte, mögen Anfänger zu ihrer eigenen Uebung selbst suchen. Den im fünften Zusatze angeführten Vortheil des Ludolph van Ceulen habe ich seines Nutzens wegen nicht übergehen zu dürfen geglaubt, da er die Division zu einer äußerst leichten Operation macht, und mit vorigem verbunden werden kann. Andere Divisionsvortheile findet man in (9.) aufgestellt, wovon die unter B) befindlichen beträchtlich sind; es ergeben sich daraus, wie im Zusatze gezeigt wird, umgekehrt, wenn man die Division erlernt hat, Vortheile für die Multiplication, welche die Arbeit gar sehr verkürzen. In dem unter (8.) aufgestellten Grundsatze wird auf die vorhin erwähnte andere Definition der Division Rücksicht genommen, und gezeigt, daß man vermittelst der bisher vorgetragenen Lehren blos in dem Falle, wenn Divisor und Dividend unbenannte ganze Zahlen sind, und ersterer in letzterem aufgeht, einzusehen im Stande ist, daß der Quotient nach beyden Definitionen einerley gefunden wird.

Die nun folgenden allgemeinen Sätze von Producten und Quotienten sind ein Gegenstück zu den im dritten Kapitel aufgestellten von Summen und Differenzen, und werden nebst ihren Beweisen den Anfängern hoffentlich verständlich seyn. Die darin vorkommenden kleinen Buchstaben bedeuten allemal unbenannte ganze Zahlen, die großen aber Größen jeder Art, und in denjenigen Gleichungen, worin

deren

deren zwey oder mehrere vorkommen, gleichartige Größen jeder Art. Was insbesondere die in (12.) aufgestellten Gleichungen betrifft, so haben (wie in III. Kap. 7.) die Gleichungen I bis XII das mit einander gemein, daß sie sämmtlich drey verschiedene Buchstaben, deren jeder zweymal vorkommt, und zwey Paar Klammern enthalten. Man kann sie ebenfalls in zwo Gattungen abtheilen: die Gleichungen I bis VI gehören zur ersten Gattung, und enthalten auf der einen Seite des Gleichheitszeichens zwey verschiedene Buchstaben und gar keine Klammern, auf der andern aber vier Buchstaben und zwey Paar Klammern; die Gleichungen VII bis XII gehören hingegen zur zweyten Gattung, und enthalten auf jeder Seite des Gleichheitszeichens alle drey Buchstaben und ein Paar Klammern. Das Verzeichniß dieser Gleichungen ist auch vollständig, so lange man blos bey der ersten Definition von Division stehen bleibt; zieht man aber auch die andere Definition von Division in Betrachtung, und gebraucht man für Quotienten, die sich darauf beziehen, das Zeichen des Semicolons, oder versteht man unter A;B die unbenannte Zahl, welche anzeigt, wievielmal die Größe B in der gleichartigen A enthalten ist: so giebt es solcher Gleichungen eine weit größere Anzahl. Folgendes wäre dann das vollständige Verzeichniß der Gleichungen von der ersten und zweyten Gattung, die zu (12.) gehörten.

Gleichungen der ersten Gattung:

1) $(n.m).(B:m) = n.B$
2) $(k:m).(m.A) = k.A$
3) $(C;A).(m.A) = m.C$
4) $(n.B):(n.m) = B:m$
5) $(k.A);(m.A) = k:m$
6) $(m.C);(m.A) = C;A$
7) $(n.B);(B:m) = n.m$
8) $(k.A):(k:m) = m.A$
9) $(m.C):(C;A) = m.A$

10) $(C;B).(B;A) = C;A$
11) $(k:n).(C:k) = C:n$
12) $(D;C).(C:n) = D:n$
13) $(C;A):(B;A) = C;B$
14) $(C:n):(k:n) = C:k$
15) $(D:n);(C:n) = D;C$
16) $(C;A):(C;B) = B;A$
17) $(C:n);(C:k) = k:n$
18) $(D:n):(D;C) = C:n$

Gleichungen der zweyten Gattung:

1) $(n.m).A = n.(m.A)$
2) $n.(m.A) = m.(n.A)$
3) $n.(B;A) = (n.B);A$
4) $(k:n).A = (k.A):n$
5) $m.(C:n) = (m.C):n$
6) $m.(C;B) = C;(B:m)$
7) $m.(C:k) = C:(k:m)$
8) $(D;C).A = D:(C;A)$
9) $(C:n):m = C:(n.m)$
10) $(C;A):m = C;(m.A)$
11) $(D:m);A = D;(m.A)$
12) $B:(k:n) = (n.B):k$
13) $k:(B;A) = (k.A);B$
14) $C;(B:m) = (m.C);B$
15) $k.(B:m) = (k:m).B$
16) $(C;A).B = (B;A).C$
17) $k:(C;B) = B;(C:k)$
18) $B:(D;C) = C:(D;B)$
19) $(C;A):n = (C:n);A$
20) $(D:n):m = (D:m):n$

Auch müßte dann das Verzeichniß der Gleichungen in (10.) vollständiger ausfallen, und würde folgendes seyn:

1) $(m.M):m = M$
2) $D:(D;m) = M$

3) $m.(D:m) = D$
4) $(D;M).M = D$
5) $(m.M);M = m$
6) $D;(D:m) = m$

und unter (II.) würden folgende gehören:

1) $(A + B):m = (A:m) + (B:m)$
2) $(A - B):m = (A:m) - (B:m)$
3) $(B + C);A = (B;A) + (C;A)$
4) $(B - C);A = (B;A) - (C;A)$

Der in der Gleichung XIII aufgestellte Satz wird weiter unten bey der Lehre von den Brüchen angewendet, und in den Gleichungen XIIII und XV sind die Regeln enthalten, Quotienten zu multipliciren und zu dividiren. Bey allen in diesen Gleichungen vorkommenden Quotienten unbenannter Zahlen wird anfangs vorausgesetzt, daß der Divisor im Dividend aufgeht; späterhin gegen das Ende des neunten Kapitels wird aber bewiesen, daß die kleinen Buchstaben auch Brüche bedeuten, und diese Einschränkungen wegfallen können.

Die Species der Arithmetik in benannten Zahlen habe ich, als eine im gemeinen Leben so häufig vorkommende Sache, im sechsten Kapitel vollständig vorgetragen, auch bey der Division auf die beyden Definitionen Rücksicht genommen.

Die ersten Anfangsgründe der Lehre von den Potenzen enthält das siebente Kapitel. Wenn man von einer Potenz die in (1.) gegebene Erklärung zum Grunde legt, so scheint es, als wenn der Exponent nie kleiner als 2 seyn könne; was also unter Potenzen, deren Exponent 1 oder gar 0 ist, zu verstehen sey, kann man aus dieser Definition nicht abnehmen. Inzwischen führt die in [3. 2) Zus.] angeführte Analogie darauf, daß man unter der ersten Potenz einer Zahl die Zahl selbst, und unter der 0ten Potenz 1 verstehen könne; und da diese Annahmen in die übrigen Lehren von den Potenzen passen, so kann man sie als Definitionen gelten lassen,

sen, weil dadurch die erste Definition nicht aufgehoben, sondern nur erweitert wird. Sie wird in der Folge noch mehr erweitert werden, so daß auch Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten statt finden können, deren Bedeutung aus der ersten Definition noch viel weniger abzunehmen ist. Ueberhaupt ist es in der Mathematik sehr gewöhnlich, daß eine Definition in der Folge der Analogie nach erweitert wird; ein ähnliches Beyspiel kommt weiter unten in der Lehre von den Brüchen vor. Doch muß man bey diesen Erweiterungen sehr vorsichtig seyn, und genau nachsehen, ob man sie auch sicher aufstellen dürfe. Die Lehrsätze (8.) und (9.) enthalten allgemeine Wahrheiten von Potenzen, und sind dieserhalb auch in Buchstaben und Gleichungen ausgedrückt worden; bey ihrem Beweise finden die im vierten Kapitel aufgestellten und erwiesenen Sätze von Producten aus mehrern Factoren ihre Anwendung.

Die in dem nun folgenden achten Kapitel enthaltenen Lehren haben mehrern Nutzen, als man anfangs glauben sollte. Mehrere Sätze und Aufgaben aus der Lehre von den Brüchen, und der späterhin folgenden von der Ausziehung der Wurzeln können ohne sie unmöglich befriedigend dargethan und aufgelöst werden, und deswegen habe ich diese Lehren mit abgehandelt. Die Sätze von (1.) bis (14.) haben es größtentheils mit allgemeinen Größen jeder Art zu thun, und darunter ist vorzüglich der Lehrsatz in (14.) nebst seinem Zusatze einer der wichtigsten. Von (15.) an werden diese Lehren aber blos auf unbenannte ganze Zahlen angewendet, oder die Eigenschaften der absoluten und relativen Primzahlen untersucht. Der Lehrsatz (15.) hätte, wie im Anhange bemerkt worden, noch allgemeiner ausgedrückt werden können und sollen. Der Lehrsatz in (16.) ist der wichtigste in diesem ganzen Kapitel, denn die ersten sieben daraus sich ergebenden Zusätze enthalten die wichtigsten Eigenschaften der absoluten und relativen Primzahlen; man ist dadurch unter andern im Stande einzusehen, daß eine zusammengesetzte Zahl nur auf eine einzige Art in einfache Factoren

zerfällt werden kann, wozu die in (17.) behandelte Aufgabe als Vorbereitungsaufgabe dient. Die Aufgabe selbst, als eine der Hauptaufgaben dieses Kapitels, habe ich in (18.) abgehandelt, und um die dabey vorkommenden mannichfaltigen Fälle zu unterscheiden, durch mehrere Beyspiele erläutert. Da selbige nicht direct, sondern blos durch Hülfe der Factorentafeln aufgelöst werden kann, so habe ich dabey die Tafeln von Vega, als eine der vollständigsten, brauchen gelehrt. Der Nutzen, den die Zerfällung zusammengesetzter Zahlen in einfache Factoren gewährt, ist sehr mannichfaltig. Man kann durch sie nach den in (19.) aufgestellten Merkmalen sogleich beurtheilen, ob eine Zahl in der andern aufgeht oder nicht, auch dadurch zu mehrern gegebenen ganzen Zahlen nach (20.) das größte gemeinschaftliche Maaß, und nach (21.) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sehr leicht finden, welches letztere in der Lehre von den Brüchen sehr häufig erfordert wird. Weil aber die Auflösungen der Aufgaben in (20.) und (21.), in so fern sie sich auf den Gebrauch der Factorentafeln gründen, nicht direct sind, so war es nöthig, auch directe Auflösnngen davon zu geben. Hierzu dient nun die Aufgabe in (22.), welche auch in der Folge bey der Lehre von den Brüchen wieder gebraucht wird. Die Eigenschaften der bey ihrer Auflösung zum Vorschein kommenden Zahlen, die ich der Kürze wegen Divisionszahlen genannt habe, mußte ich deswegen in den Zusätzen ausführlich untersuchen, weil selbige zum Beweis einer in dem folgenden neunten Kapitel unter (21.) vorkommenden Aufgabe nöthig sind. Diejenigen, die sich daran begnügen, diese letztere in der Ausübung so nützliche Aufgabe blos mechanisch auflösen zu können, ohne sich um die Gründe der Auflösung zu bekümmern, mögen den vierten und die folgenden Zusätze bey der erstern Aufgabe überschlagen. Hoffentlich aber wird mich dies entschuldigen, daß ich mich dabey so lange verweilt habe. In dem vierten und fünften Zusatze kommen Beyspiele von dem Nutzen und der Kürze vor, welche durch figürliche Darstellungen von Gleichungen

chungen erreicht wird. Mehrere der oben angeführten allgemeinen Sätze von Summen und Differenzen kommen dabey in Anwendung. Das im siebenten Zusatze angeführte Schema stellt nicht nur die sämmtlichen, theils in dem Beweise, theils in den vorhergehenden Zusätzen aufgestellten Gleichungen kurz dar, sondern führt auch noch auf andere. Ueber den Inhalt des achten und neunten Zusatzes sehe man die Betrachtungen im Anhange über cyklische Perioden, und die damit verwandte Aufgabe. Die Aufgaben in (23.) und (24.) endlich lehren das direct finden, was die Aufgaben in (20.) und (21.) indirect, nämlich vermittelst der Factorentafeln, bewerkstelligten, sind aber freylich nicht so kurz wie jene.

Die Lehre von den Brüchen kommt Anfängern insgemein schwer vor; ich habe mich daher in dem folgenden neunten Kapitel, worin ich diese Lehre vortrage, vorzüglich bemüht, durch einen streng systematischen Vortrag diese Schwierigkeit zu heben. Die mehresten Sätze und Aufgaben habe ich, wo es möglich war, in Gleichungen ausgedrückt, welche, ohnerachtet sie zwar keine Buchstaben, sondern blos bestimmte Zahlen enthalten, doch so beschaffen sind, daß man sogleich übersieht, wie zu verfahren ist, wenn statt der bestimmten Zahlen andere stünden. Der Lehrsatz in (10.) enthält drey Methoden, einen Bruch ohne Aenderung seines Werthes in andern Zahlen auszudrücken. In den zugehörigen Zusätzen sind die Merkmale angegeben worden, wonach man beurtheilen kann, ob zwey verschieden ausgedrückte Brüche gleiche Werthe haben oder nicht; auch ist gezeigt worden, daß es von jedem Bruche eine Darstellung in den kleinsten Zahlen giebt, und wie man sie finden kann; zu beyden werden verschiedene Lehren des vorigen Kapitels erfordert. Noch mehr ist das der Fall bey der Aufgabe in (13.) wo zur Bestimmung des Generalnenners die Auflösung der Aufgabe in (21.) und (24.) des vorigen Kapitels erfordert wird. In (16.) ist gezeigt worden, wie man nach der Analogie die (Einl. 15.)

ge-

gegebene Definition von Multiplication so erweitern könne, daß der Multiplicator auch ein Bruch seyn kann, wobey verschiedene von den oben aufgestellten allgemeinen Sätzen von Producten und Quotienten in Anwendung kommen. Hieraus ergiebt sich umgekehrt, was es heiße, eine Größe durch einen gebrochenen Divisor nach der ersten Definition zu dividiren, und es läßt sich nun die Multiplication und Division der Brüche vollständig vortragen. Es zeigt sich dabey, daß man auch, wenn beyde Factoren unbenannte Brüche sind, Multiplicator und Multiplicand verwechseln könne, und daß, wenn Dividend und Divisor unbenannte Brüche sind, nach beyden Definitionen von Division doch einerley Quotient gefunden wird. Die Sätze (18.) bis (20.) beschäftigen sich mit Bruchsbrüchen und der daraus sich ergebenden einfachsten Art von Kettenbrüchen, wozu verschiedene Lehren des vorigen Kapitels wieder gebraucht werden. Dies findet aber in noch weit höherem Grade bey der nützlichen Aufgabe in (21.) statt, deren Gründe ohne jene Lehren gar nicht verstanden werden können. Bey dem Beweise des zugehörigen zweyten Zusatzes kommen die unter denen, in (III. Kap. 7.) aufgestellten allgemeinen Sätzen von Summen und Differenzen befindlichen Gleichungen der zweyten Gattung zum erstenmal in Anwendung, welches noch viel häufiger im folgenden Kapitel geschieht; derowegen haben diejenigen Anfänger, die sie dort überschlagen haben, sie nun nachzuholen. In (22.) habe ich nach dem Beyspiele Kästners gezeigt, daß verschiedene Sätze, deren Wahrheit vorher blos für ganze Zahlen dargethan worden, auch richtig verbleiben, wenn man statt der ganzen Zahlen Brüche setzt. Die beyden letzten Aufgaben in (23.) und (24.) sollen hoffentlich hinreichend seyn, um den Anfänger in den Stand zu setzen, die Lehre von den Brüchen auch auf benannte Zahlen anwenden zu können.

So wahr es ist, daß die Lehre von zusammengesetzten Ausdrücken, wie im folgenden zehnten Kapitel vorkommen,

sich

sich ohne die Lehre von den entgegengesetzten Größen nicht vollständig vortragen läßt, so wahr ist es auch, daß eine zu frühe Einmengung der letztern in die erstern den Anfängern ohne Noth Schwierigkeit und Undeutlichkeit verursacht. Noch vielmehr ist dies der Fall, wenn diese Einmischung auf eine unrichtige Art geschieht, und zwey ganz verschiedene Dinge mit einander vermengt werden. Leider haben die mehresten, selbst bessern unserer mathematischen Lehrbücher diesen Fehler; man hat beyde Lehren auf eine sonderbare Art mit einander vermengt, und die additiven und subtractiven Glieder solcher Ausdrücke mit positiven und negativen verwechselt, weil man einige Aehnlichkeit in den Regeln, wie mit beyden gerechnet wird, fand, statt daß man den Grund dieser Aehnlichkeit genauer hätte untersuchen sollen. Gewöhnlich braucht man statt der Worte additiv und subtractiv die Worte positiv und negativ; doch ist man auch in den umgekehrten Fehler verfallen. Herr Lorenz bedient sich nämlich in seinem neuesten Lehrbuche des Wortes negativ gar nicht, und setzt statt dessen durchgängig subtractiv, welches eben so falsch ist. Ich habe daher, um diesen Fehler zu vermeiden, das Nothwendigste, was sich von den Eigenschaften solcher zusammengesetzten Ausdrücke ohne die Lehre von den entgegengesetzten Größen beybringen läßt, im zehnten Kapitel abgehandelt, vorzüglich in der Absicht, um den Anfänger auf die Lehre von den entgegengesetzten Größen, die in dem folgenden Kapitel vorgetragen wird, vorzubereiten. So lange man blos mit solchen zusammengesetzten Ausdrücken, die ich daselbst verständlich genannt habe, und mit Differenzen, wobey der Minuend nicht kleiner als der Subtrahend ist, zu rechnen hat, lassen sich diese Lehren, vorzüglich vermittelst der oben aufgestellten allgemeinen Sätze von Summen und Differenzen, auf das leichteste und befriedigendeste, und ohne ein Wort von positiven und negativen Größen zu erwähnen, rechtfertigen. Ich setze daher gleich anfangs den Unterschied zwischen verständlichen und anstößigen zusammenge-

setzten Ausdrücken fest, und bemerke, daß erst die Folge entscheiden muß, ob letztere einen Werth haben oder nicht. In den Zusätzen zu (3.) wird hierauf noch ein anderes Merkmal angegeben, wodurch sich anstößige Ausdrücke von verständlichen unterscheiden, und gezeigt, daß zwey oder mehrere verständliche Ausdrücke, die einerley additive und subtractive Glieder, nur in verschiedener Ordnung, enthalten, einerley Werth haben. Bey den darauf folgenden Aufgaben, dergleichen verständliche Ausdrücke zu addiren, zu subtrahiren und zu multiplicieren, war es daher nöthig, die Vorschriften so einzurichten, daß von den gesuchten zusammengesetzten Ausdrücken nicht nur die Glieder und ihre Beschaffenheit, ob sie nämlich additiv oder subtractiv sind, sondern auch wenigstens eine Ordnung angegeben wurde, in der sie geschrieben wirklich verständliche Ausdrücke geben. Dies ist auch der Grund, warum ich in (4.) bey der Addition zusammengesetzter Ausdrücke die Vorschrift gegeben habe, die Theile und ihre Ordnung zu lassen, wie sie sind. Bey der Subtraction habe ich aus eben dem Grunde die Regel aufgestellt, im Subtrahend die Theile und ihre Ordnung umzukehren; auch war es nöthig zu erinnern, daß der Minuend nicht kleiner als der Subtrahend seyn dürfe. Bey der in (7.) vorgetragenen Multiplication zweyer zusammengesetzter Ausdrücke habe ich aus eben der Ursache die Ordnung angegeben, in der die Producte geschrieben werden müssen; ihre Beschaffenheit bestimmt sich nach der Regel, daß einerley Zeichen +, verschiedene aber — geben, welche also hier ganz unabhängig von der Lehre von den entgegengesetzten Größen bewiesen und gerechtfertigt worden ist. Die Division zusammengesetzter Ausdrücke konnte hier nicht vorgetragen werden.

Die Lehre von den entgegengesetzten Größen ist in den neuesten Zeiten heftig angegriffen worden. Klügel tadelte zuerst am oben angeführten Orte den gewöhnlichen Vortrag dieser Lehre, und, wie mich dünkt, mit Recht. Er war es,

der

der zuerst (Seite 311.) erinnerte, daß additive und subtractive Größen von positiven und negativen unterschieden werden müßten, und daß, wenn man den Unterricht über die auf eine allgemeinere Art darzustellenden arithmetischen Species (also eigentlich über die arithmetischen Species mit zusammengesetzten Ausdrücken) auf die entgegengesetzten Größen begründe, in den Ideen der Anfänger nothwendig Dunkelheit und Verworrenheit entstehen müsse. Proben, wie man diese Species ganz unabhängig von der Lehre von den entgegengesetzten Größen erweisen könne, findet man in dem Beweise der Seite 479 angeführten Gleichungen, wovon die meisten auch hier vorkommen. Die Gleichung VIII bey Klügel

$$(a - b).(c - d) = a.c - a.d - b.c + b.d$$

ist im Wesentlichen mit meiner [IIII. Kap. 5. 4) Zus.] einerley, nur daß die Ordnung der Theile auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens anders ist. Dies hat aber das Nachtheilige, daß, wenn man auch für a, b, c, d blos absolute oder positive Zahlen, und dabey $a > b$ und $c > d$ annimmt, der auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindliche zusammengesetzte Ausdruck doch in manchen Fällen, z. B. wenn $a = 8$, $b = 5$, $c = 13$, $d = 9$ anstößig wird, man also bey seiner Berechnung doch auf ein negatives Zwischenglied kommt, folglich wider die Absicht Herrn Klügels negative Größen in Betrachtung zu ziehen genöthigt ist. Diesem Umstande aber hätte sogleich abgeholfen werden können, wenn Herr Klügel außer seiner Gleichung III

$$a - (b - c) = a - b + c$$

(welche mit der von mir [III Kap. 7. 7) Zus. IX] aufgestellten einerley ist) durch deren Hülfe die obere dargethan wird, noch die Formel

$$a - (b - c) = a + c - b$$

oder meine Formel [III. Kap. 7. 9) Zus. XI] in Betrachtung gezogen hätte. Jene findet, wenn man nicht auf negative Größen kommen will, wie im Anhange gezeigt ist, nur unter

der

der Bedingung statt, daß $b > c$ und $a > b$ ist; bey dieser aber wird blos erfordert, daß außer $b > c$ nur noch $a > b - c$ ist. Hieraus erhellet, daß zwar allemal, wo die erste Gleichung anwendbar ist, es auch die zweite sei, nicht aber umgekehrt; denn in den Fällen, wo $b > c$ und a zwar größer als $b - c$, doch aber kleiner als b ist, kann blos die zweite, nicht aber die erstere angewendet werden. Hätte nun Herr Klügel die letztere Formel angewendet, so hätte er die Gleichung erhalten:

$$(a - b) . (c - d) = a . c - a . d + b . d - b . c$$

bei welcher man, wenn man für a, b, c, d absolute oder positive Zahlen, und zwar $a > b$ und $c > d$ annimmt, nie auf negative Größen kommen kann, und eben dies findet noch vielmehr bey meiner ihr gleichgültigen Statt. Auf diese Gleichung würde man auch durch die Befolgung der (X Cap. 7.) angegebenen Vorschriften gekommen seyn.

Andere, den Ideen Herrn Klügels größtentheils widersprechende Meinungen äußerte Herr Commissionsrath Buße in den Schriften: Formulae linearum subtangentium ac subnormalium, tangentium ac normalium et castigatae, et diligentius quam fieri solet explicatae. Lips. 1798 und dann noch vielmehr in der Schrift: Neue Erörterungen über Plus und Minus, Tadel eines bisherigen, und Darstellung eines genauern Gebrauchs desselben für die Trigonometrie und andere arithmetische, statische und hydrostatische Aufgaben. Erste Abtheilung. Cöthen, 1801.

Den neuesten und heftigsten Angriff auf diese Lehre unternimmt Carnot in dem Werke: Geometrie de position. Paris. An XI - 1803. Seine Ideen nähern sich zum Theil denen des Herrn Klügel, doch verfällt auch er in die fehlerhafte Verwechslung additiver und subtractiver Größen mit positiven und negativen. Dies bezeugen die Worte

seiner

seiner Vorrede pag. II.: Rien n'est plus simple que la notion des quantités négatives précédées par des quantités positives, plus grandes qu'elles; mais en algèbre on est a chaque instant conduit a des expressions de formes négatives isolées etc. Was Carnot hier positive und negative Größen nennt, sind eigentlich nichts anders als additive und subtractive Größen; das was er aber formes négatives isolées nennt, sind die eigentlichen negativen Größen. Diese Verwechslung nimmt zwar Carnot weiterhin in seiner Schrift in Schutz, indem er Seite 25 sich so ausdrückt: Concluons de-là que les signes + et — ont véritablement deux Fonctions très-différentes dans le calcul; la première, d'indiquer l'addition ou la soustraction, la seconde, d'exprimer les mutations successives qui arrivent dans un systême variable, et les divers degrés de conformité ou de non conformité qu'il conserve dans ces différens états de transformation, avec son premier état. Ces deux fonctions ont lieu simultanément comme conséquences l'une de l'autre, et non en vertu de conventions distinctes. Sein Beweis ist folgender: Si c'étoit comme on le suppose souvent, en vertu de conventions distinctes, il faudroit prouver, que ces conventions n'ont rien d'incompatible entre elles, et qu'elles doivent conduire aux mêmes règles pour la combinaison des signes dans les operations algébriques. Allerdings müßte ein solcher Beweis geführt werden, welcher die Aehnlichkeit der Regeln rechtfertigte, wie auch in diesem Lehrbuche geschehen ist. Mais puisqu'elles sont, comme on vient de voir, suite nécessaire l'une de l'autre, l'identité des reglès qui en derivent en résulte évidemment. Worauf sich die Worte comme on vient de voir beziehen, sehe ich nicht ein. Ein großer Theil seiner Einwürfe entsteht aus dieser Verwechslung, und die übrigen, die nicht daraus fließen und die Lehre selbst, nicht blos ihren bisherigen Vortrag betreffen, lassen sich beantworten. Das Werk ist sonst nicht ohne Scharfsinn geschrieben, enthält

hält aber doch auch Unrichtigkeiten, vorzüglich falsche Beschuldigungen der Vertheidiger der bisherigen Theorie.

Diese Rücksichten veranlaßten mich, bey der Ausarbeitung dieses Lehrbuchs auf den Vortrag dieser Lehre im eilften Kapitel doppelten Fleiß zu verwenden. Man kann sie nicht, wie Herr Lorenz, blos auf die Lehre von den zusammengesetzten Ausdrücken einschränken, und durch eine sorgfältigere Bearbeitung dieser letztern entbehrlich machen, sondern muß sie besonders vortragen.

Positive Größen sind Differenzen, wobey der Minuend größer als der Subtrahend ist, und also von den gewöhnlichen vorher betrachteten gar nicht unterschieden. Negative Größen hingegen sind — man mag sich noch so sehr wider diese Definition auflehnen — doch in der That nichts weiter als Differenzen, wobey der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, also in der That weniger als nichts, und in so fern, da man in der Ausübung von einer kleinern Größe eine größere nicht wirklich abziehen kann, ein bloßer Verstandesbegriff, oder ein être de raison, wie es Carnot nennt. Daß man auf dergleichen Differenzen kommen kann, und daß sie einen Sinn haben, zeigt die Bemerkung in (1.) nebst ihren Zusätzen.

Man pflegt den Vortrag der Lehre von den entgegengesetzten Größen gewöhnlich so anzufangen, daß man sagt: »Entgegengesetzte Größen sind solche, welche in der Verbindung einander aufheben oder vernichten, z. B. Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust, Steigen und Fallen, Vorwärts- und Rückwärts-gehen u. s. w.; die eine von diesen Größen, welche man will, nennt man positiv und die andere negativ; positive Größen bezeichnet man durch ein vorgesetztes +, negative aber durch ein vorgesetztes — u. s. w.«

Allein diese Definition ist äußerst unvollständig; man kann z. B. nach selbiger nicht erklären, was unter Potenzen mit negativen Exponenten zu verstehen sey. Die Bezeichnung des

des Positiven und Negativen durch + und − ist auch, wo nicht fehlerhaft, doch wenigstens sehr unzweckmäßig; denn sie begünstigt die mehrmals gerügte Verwechselung, scheint sogar daher entstanden zu seyn, und man ist dabey genöthigt, die Zeichen + und − in einem doppelten Sinne zu nehmen, und wo sie vorkommen, genau nachzusehen, in welchem Sinne sie gebraucht werden. Ich bin daher fest überzeugt, daß diese bisherige Bezeichnung des Positiven und Negativen durch + und − nicht länger beybehalten werden darf, wenn Anfänger nicht irre werden sollen. Vielleicht wird mir Mancher einwerfen, daß man mit diesen Zeichen bis jetzt ausgereicht, und so viele wichtige und große Untersuchungen und Erfindungen durch sie angestellt und gemacht hat; allein hierauf antworte ich, daß dies nur von solchen geschehen seyn könne, die durch eine lange Uebung, vielleicht ohne selbst daran zu denken, sich die Fertigkeit erworben haben, bey dem Gebrauche dieser Zeichen sogleich zu sehen, ob sie in dem einen oder andern Sinne gebraucht werden.

Positive Größen anzudeuten, bedarf es gar keines eigenen Zeichens, denn sie sind von den in den vorigen Kapiteln betrachteten gar nicht unterschieden, und wenn man sich des Wortes positiv vorher nicht bediente, so geschah es deswegen, weil man noch keine andern Größen kannte, von denen sie hätten unterschieden werden müssen, oder denen sie hätten entgegengesetzt werden können. Für negative Größen aber ist ein eigenes Zeichen nothwendig. Nachdem ich also vorher [2. 2) Zus.] gezeigt habe, daß zwo negative Differenzen, bey denen der Subtrahend den Minuend um gleichviel übertrift, einander gleich sind, so gebrauche ich, um sie anzudeuten, ein Sternchen, das ich über den Ueberschuß setze, um welchen der Subtrahend den Minuend übertrift.

Man hat auch, ohne es ausdrücklich zu erinnern, die Zeichen + und − noch in einem andern erweiterten Sinne gebraucht, und dadurch, daß man einer Größe A das Zei-

chen + vorsetzt, oder unter + A die Größe A selbst, unter — A hingegen das Entgegengesetzte von A verstanden. Ist A eine positive Größe, so trifft diese Bezeichnung mit der vorigen überein; ist aber A eine negative Größe, so bedeutet nun + A dieselbe negative, und — A die entgegengesetzte positive Größe. Aber auch diese Erweiterung ist denselben Einwürfen ausgesetzt, denn immer werden dabey die Zeichen + und — in einem andern als ihrem ursprünglichen Sinne genommen, nach dem sie nichts anders als Zeichen der Addition und Subtraction sind. Ueberdies ist das erstere ganz unzweckmäßig; denn wozu bedarf es, daß man, um eine Größe A selbst und nicht ihr Entgegengesetztes anzudeuten, vor diese Größe noch das Zeichen + schreibt? Ist es nicht hinreichend, A allein ohne alles Zeichen hinzusetzen? — Es folgt daraus, daß das Zeichen + blos als Additionszeichen brauchbar, in jedem andern Sinne aber sowohl als Zeichen des Positiven als auch des Nichtentgegengesetzten ein ganz überflüßiges Ding ist. Um aber das Entgegengesetzte einer Größe anzudeuten, ist es allerdings nöthig, ein eigenes Zeichen zu wählen. Da das Zeichen — als Zeichen der Subtraction hierzu nicht gebraucht werden konnte, so habe ich hierzu das nur wenig abgeänderte Zeichen $\dot{-}$ gewählt, und mich dünkt, daß selbiges beybehalten werden kann, weil es beynahe eben so kurz wie das bisher gebrauchte ist. Dieses Zeichen macht sogar das vorhin erwähnte Zeichen des Sternchens gewissermaßen überflüßig, weil $\dot{-}3$ mit $\overset{*}{3}$ einerley ist; doch halte ich immer für gut, außer dem erwähnten Zeichen der Entgegensetzung, welches, je nachdem es vor einer positiven oder negativen Größe steht, etwas Negatives oder Positives andeutet, noch eins zu haben, welches insbesondere n e g a t i v e Größen bezeichnet, und dazu habe ich einstweilen das Sternchen gewählt. Ich sage nicht ohne Ursache e i n s t w e i l e n, denn es ist nicht meine Absicht, dieses Zeichen einführen zu wollen, und ich fühle die Unbequemlichkeit, die selbiges sowohl im Schreiben als auch im Drucke bey sich führt, gar

sehr;

sehr; allein ich konnte bey der Ausarbeitung dieses Buches kein schicklicheres und zugleich kürzeres finden; und es soll mir sehr angenehm seyn, wenn Sachkenner über die Wahl eines zweckmäßigern Zeichens mit Vorschlägen bald hervortreten, und ein solches einführen. Die Zeichen + und — werden daher in dieser Schrift blos als Additions- und Subtractionszeichen gebraucht.

Genau genommen ist die Lehre von den entgegengesetzten Größen nichts anders, als eine weit getriebene Analogie. Will man also die Regeln, wie mit positiven und negativen Größen gerechnet wird, oder die Regeln, nach denen die Species der Arithmetik mit selbigen verrichtet werden, finden, so kann man nichts weiter thun, als die in den vorigen Kapiteln angeführten Sätze, welche lehren, wie Differenzen addirt, subtrahirt und multiplicirt werden, und welche anfangs nur für solche Differenzen, deren Minuend größer, oder doch wenigstens nicht kleiner als der Subtrahend ist, erwiesen waren, der Analogie nach, und ohne Beweis auch auf negative Differenzen auszudehnen sich erlauben, und sehen, was für Resultate herauskommen, und ob diese Resultate sich widersprechen oder nicht. Als Grundlage für die in (3.) vorgetragene Addition entgegengesetzter Größen dient daher der Satz (III. Kap. 8. I). Die im zweyten Zusatze enthaltene allgemeine Wahrheit ist davon eine leichte Folge, und im dritten Zusatze wird gezeigt, wie diese Resultate mit den vorigen Lehren übereinstimmen. Als Grundlage des Satzes in (4.) und der darauf beruhenden und in (5.) gezeigten Subtraction entgegengesetzter Größen dienen die Sätze (III. Kap. 8. I und II]. Der erste Zusatz zeigt, wie die daraus sich ergebenden Resultate mit den vorigen Lehren übereinstimmen, und der zweyte enthält einige allgemeine Sätze über Summen und Differenzen entgegengesetzter Größen. Als Grundlage des Satzes in (6.) dient der Satz [IIII. Kap. 5. 4) Zus.]; der erste Zusatz drückt die darin enthaltenen Wahrheiten durch Buchstaben und Gleichungen aus, und im zweyten wird gezeigt, wie diese Resul-

sultate mit den vorigen Lehren übereinstimmen. Hierauf beruht die in (7.) vorgetragene Multiplication entgegengesetzter Größen, und man übersieht hieraus ohne Schwierigkeit, warum ein Product aus zwey gleichartigen Factoren (d. h. die entweder beyde positiv oder beyde negativ sind) allemal positiv, ein Product aus zwey ungleichartigen aber allemal negativ seyn muß. Dieser Satz aber ist von den schon im vorigen Kapitel erwiesenen, daß + mit +, und — mit — multiplicirt +, hingegen + mit — multiplicirt — zum Producte giebt, ganz verschieden. Dieser letzte ist blos Regel, welche bey der Multiplication zusammengesetzter Ausdrücke ihre Anwendung findet, jener aber im eigentlichsten Sinne Lehrsatz. Aus den vorgetragenen Regeln der Multiplication ergiebt sich, daß auch hier, wenn beyde Factoren unbenannt sind, Multiplicator und Multiplicand mit einander verwechselt werden können, wie im ersten Zusatze erinnert wird, so wie die allgemeinen Sätze im 3) und 4) Zusatze. Die in (8.) enthaltenen Regeln der Division entgegengesetzter Größen werden aus denen unmittelbar vorher in (7.) vorgetragenen Regeln der Multiplication abgeleitet, und gelten für beyde Definitionen von Division. Es ergeben sich daraus die allgemeinen Sätze im 1) und 2) Zusatze, auch übersieht man nach dem dritten Zusatze leicht, daß auch hier, wenn Dividend und Divisor unbenannte Zahlen sind, beyde Definitionen von Division einerley Quotienten geben; und zugleich erhellet, was unter Brüchen, worin entweder der Zähler allein, oder der Nenner allein, oder beyde zugleich negative Zahlen sind, zu verstehen sey, wovon der vierte Zusatz handelt. In der unter (9.) aufgestellten Bemerkung wird gezeigt, daß verschiedene allgemeine Sätze, die bisher blos für positive Größen erwiesen waren, auch wahr verbleiben, wenn statt einiger oder aller negative Größen gesetzt werden.

Die nun folgende Anwendung der vorgetragenen Lehren auf eine allgemeinere Betrachtung der zusammengesetzten Ausdrücke ist als Ergänzung des vorigen Kapitels zu betrachten.

Solche

Solche zusammengesetzte Ausdrücke, die im vorigen Kapitel anstößige hießen, haben, wie man nun sieht, allerdings einen Werth, ihre Entwickelung ist keiner Schwierigkeit mehr unterworfen, und diese Benennung fällt nun ganz weg. Der Umstand, daß man nach [10. 6) Zus.] jeden zusammengesetzten Ausdruck als Summe darstellen kann, macht, daß die Rechnung mit zusammengesetzten Ausdrücken von der Rechnung mit Summen abhängig gemacht werden kann, und dies ist der einzige Grund der Aehnlichkeit der Regeln, die bey der Rechnung mit zusammengesetzten Ausdrücken und mit entgegengesetzten Größen statt finden. Wegen [10. 8) Zus.] glaubte man sich wahrscheinlich berechtiget, additive und subtractive Größen mit positiven und negativen zu verwechseln; allein der Grund ist nicht hinreichend; denn man deutet die Summe mehrerer Größen nicht durch bloßes Nebeneinanderschreiben derselben an. Durch Zuziehung der Lehre von den entgegengesetzten Größen werden die Beweise mannichfaltiger, wovon der zweyte Beweis zu (11.) ein Beyspiel giebt. Die lästige Vorsicht, die man im vorigen Kapitel bey der Anordnung der bekannten Glieder eines zusammengesetzten Ausdrucks anwenden mußte, um denselben nicht anstößig zu machen, und nicht auf negative Größen zu kommen, fällt ganz weg, da nach [11. 1) Zus.] die Glieder ganz willkührlich unter einander geordnet werden können, wenn nur das Glied am weitesten zur Linken ein additives Glied ist. Diese letztere Rücksicht darf aber meiner Meinung nach nicht außer Acht gelassen werden. Zwar weiß ich wohl, daß die größten Mathematiker sich solcher Ausdrücke bedient haben, wie z. B. folgender ist:

$$-a - b + c + d - e$$

welcher den Werth eines zusammengesetzten Ausdrucks, dessen additive Glieder c und d, und dessen subtractive Glieder a, b und e sind, andeutet; allein ich kann es nicht billigen, weil es den Anfänger zu falschen Vorstellungen verleitet, und die oft gerügte Verwechselung begünstigt. Das Glied am weitesten

sten zur Linken muß allemal ein additives Glied seyn, und darf kein Vorzeichen haben; ich kann es daher auch nicht für gut halten, wenn man einen zusammengesetzten Ausdruck, wie z. B. folgenden:

$$a - b + c + d - e$$

so schreibt:

$$+ a - b + c + d - e$$

denn das Zeichen + am weitesten zur Linken ist überflüßig.

Der vorzüglichste Nutzen der Lehre von den entgegengesetzten Größen besteht in der Verkürzung, die sie durch Zusammennehmung mehrerer verwandter Fälle gewährt. Hat nämlich ein Satz mehrere verwandte Fälle, die man ohne sie besonders untersuchen müßte, so braucht man nur einen dieser Fälle zu untersuchen, und kann die übrigen durch ihre Hülfe auf diesen ersten untersuchten Fall zurückführen. Beyspiele finden sich in den Aufgaben (3.) und (4.).

Der Anhang enthält noch einige merkwürdige Untersuchungen und Zusätze, vorzüglich zum achten Kapitel, welche ich, um dieses schon ohnedies lange Kapitel nicht noch mehr zu vergrößern, bis zum Schlusse verspart habe.

Ich kann und darf mir das Zeugniß geben, daß ich auf die Ausarbeitung dieses Lehrbuches vielen Fleiß und Sorgfalt verwendet habe; dennoch aber fürchte ich, daß bey den drückenden Verhältnissen, in denen ich es niederschrieb, und welche mir die dazu nöthige Heiterkeit des Geistes oft raubten, noch viele Mängel und Lücken darin sich finden dürften. Gründliche Beurtheilungen sachkundiger Männer werden mir daher sehr willkommen seyn, und ich verspreche ihre Winke zu möglichster Vervollkommnung desselben sorgfältig zu benutzen.

Da

Da ich die Correctur nicht selbst habe besorgen können, so haben sich eine Menge Druckfehler eingeschlichen, die ich mit möglichster Sorgfalt aufgesucht und in nachfolgendem Verzeichnisse mitgetheilt habe. Anfängern rathe ich, diese Fehler erst zu verbessern, damit sie ihnen nicht im Studiren dieses Buches hinderlich werden; denn es sind, vorzüglich im letzten Kapitel, mehrere darunter, die den Sinn entstellen.

Der zweyte Theil dieses Lehrbuchs soll die fernern Lehren der Elementararithmetik, als die Lehre von den Decimalbrüchen, von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, von den Verhältnissen und Proportionen und Logarithmen enthalten. Freyberg am 22. Nov. 1803.

Heinrich August Rothe.

Druckfehler.

S. 31 Z. 9 von unten statt $\overset{1}{4}\dagger\overset{1}{2}\dagger\overset{1}{2}\dagger\overset{1}{3}\dagger\overset{1}{3}$ lies $\overset{1}{4}\dagger\overset{2}{2}\dagger\overset{3}{2}\dagger\overset{4}{3}\dagger\overset{5}{3}$
= 42 = 16 v. u. st. vermindert l. E vermindert
= 47 = 5 v. u. st. Wahrheit l. Wahrheit II
= 51 = 17 v. o. st. (k – m.) A l. (k – m). A
= 62 = 6 v. u. st. l l. i
= 67 = 15 v. o. st. 039548316 l. 039548319
= 75 = 5 v. o. st. 7. Anm. l. (7. Anm.)
= 76 = 4 v. o. st. Ziffrr l. Ziffer
= 79 = 1 v. o. st. 42 l. $4\overset{8}{2}$
= 81 = 17 v. o. st. das Zehnfache l. das Zehnfache der Ziffer in der höchsten Stelle
= 82 = 15 v. o. st. Qaotienten l. Quotienten
= 87 und 89 sind bey den daselbst angeführten Divisionsbeyspielen die Ziffern und Puncte genauer untereinander zu setzen.
= 90 = 14 v. u. st. 78639|4621438 l. 78639|4621538
= 94 = 7 v. u. st. 9876243774163 l. 9.8.8.7.6.243774163
= 96 = 4 v. o. st. 352 : 4 oder 88 l. 352 : 8 oder 44
= 105 Z. 7 v. u. muß heissen:

$$p.(C:n) = p.(m.[C:(n.m)]) = (p.m).[C:(n.m)]$$

= S. 106 = 13 v. o. st. XIII l. XIIII
= 107 = 9 v. o. st. 10) Zusatz l. 9) Zusatz
= 108 = 8 v. o. st. (Einl. 8 und 9.) l. (Einl. 9.)
= 113 = 4 v. o. st. 4 Qu. l. 3 Qu.
= 114 = 14 v. o. st. Horzontalstrich l. Horizontalstrich
= 120 = 1 v. u. st. Quotientrn l. Quotienten
= 124 = 4 v. o. st. (3 Qu. l. (3 Qu.)
= 128 = 4 v. o. st. gelichen l. gleichen
= 129 = 5 v. u. st. 3. l. (3.)
= 131 = 5 v. u. st. $4376 = 4376.10^5$ l. $437\overset{5}{6} = 4376.10^5$
= 132 = 3 v. u. st. von Factoren l. der Factoren
= 138 = 16 v. u. st. gemessen l. A gemessen
= 139 = 10 v. u. st. A = (n.m). A l. k. A = (n.m). A
= 145 = 15 v. o. st. als die l. als 1
= 152 = 2, 3, 4 v. o. muß vor jeder von den Endziffern 8, 3, 7 ein + stehen, und dagegen die beyden dazwischen stehenden + wegfallen.

S.

S. 160 = 1 v. u. st. $3^2.3^2 3.7$ l. $3^2.3^2.3.7$
= 168 = 12 v. u. st. $2^2.3 7$ l. $2^2.3.7$
— — = 2 v. u. st. 19.1) l. (19.1)
= 169 = 12 v. o. st. [19.1) l. [19.1]
= 172 = 6 v. u. st. [13.1) Zus.] l. [13. Zus.]
= 176 = 10 v. u. st. 1) Zus.] l. Zus.]
= 177 = 3 v. o. st. 3.2092 l. 3.2002
= 178 = 15 v. u. st. (3 942) l. (3.942)
= 180 = 11 v. o. st. steht, welcher l. steht, (welcher
= 181 = 4 v. o. st. 4 l. 6
= 186 = 7 v. o. st. Zusatze die l. Zusatze, der
= 188 = 10 v. u. st. 4183 l. 4813
= 193 = 7 v. u. st. $\frac{4}{7} > 1$ l. $\frac{4}{7} < 1$
= 198 = 11 v. u. st. Einl. 15 l. Einl. 16.
= 199 = 10 v. o. st. 10) Zus. l. 10. Zus.
= 201 = 6 v. o. st. Brüche $b -$ l. Brüche $\frac{b}{a}$
= 207 = 9 v. u. st. $\frac{020}{1107}$ l. $\frac{939}{1107}$
= 208 = 11 v. u. st. 20 oder 24 l. 21. oder 24.
= 216 = 9 v. u. muß heißen:
denn $\frac{568}{672} + \frac{223}{672} = \frac{791}{672} = \frac{672}{672} + \frac{119}{672}$
= 217 = 4 v. u. st. nach (6. 1) Zus. l. nach (6. 1) Zus.)
= 222 = 6 v. o. st. V. Kap. 3) Zus. l. V. Kap. 12. 3) Zus.
= 224 = 11 v. u. st. $\sqrt{81}$ l. $\sqrt[4]{81}$
—— — 6 v. u. st. 5) Zusatz l. 14) Zusatz
= 225 = 6 v. o. st. 243 l. 253
= 227 = 4 v. u. st. $\frac{\frac{3}{2}}{7}, \frac{\frac{4}{29}}{6}, \frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}}$ l. $\frac{\frac{3}{2}}{7}, \frac{4}{\frac{29}{16}}, \frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}}$
= 230 unten muß es heißen:

$$\text{also } \frac{474}{1297} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}}}}}$$

= 238 = 8 v. o. st. 3) Zus. l. 8) Zus.

S.

S. 239 muß der sechste Kettenbruch heißen:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}}}}}$$

- 240 - 6, 5, 3 v. u. st. 2 l. 8
—— — 1 v. u. st. 4.2 l. 4.8
- 243 - 10 v. o. st. δ l. ζ
—— unten muß es heißen:
der folgende Näherungsbruch $\frac{2914}{9451}$ = $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\frac{1}{7}}}}}$

- 246 - 9 v. o. st. 4[A + B : 7] l. 4[(A + B) : 7
—— — 11 v. o. st. (IIII. Kap. 5. l. (IIII. Kap. 5.)
- 247 - 9 v. o. st. b. l. b
—— — 11 v. o. st. $(\frac{c}{d}.A)$ l. $(\frac{c}{d}.A)$
—— — 8 v. u. st. $\frac{c}{d}.(\frac{a}{b}.A$ l. $\frac{c}{d}.(\frac{a}{b}.A)$
- 249 - 14 v. u. st. (16.2) Zus. l. (16. 2) Zus.)
- 250 - 8 v. o. st. $\frac{3}{8} > \frac{4}{7}$ l. $\frac{3}{8} < \frac{4}{7}$
—— — 10 v. o. st. $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} < 1$ l. $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} > 1$
- 251 - 5 v. o. st. nach l. nach 4)
- 252 - 12 v. o. st. 2) Zus. l. 2) Zus.]
- 255 - 6 v. o. st. ($\frac{4}{7}$. 5$\frac{1}{3}$ Thaler) l. ($\frac{4}{7}$. 5) Thaler
- 266 - 5 v. o. st. 6 17 l. 6 + 17
—— — 12 v. u. st. 4 11 l. 4 + 11
- 270 - 13 v. u. st. 22.2 l. 22.2)
—— — 7. v. u. muß was zwischen den beyden = steht heißen:
[(a — b — c) + d]. A
—— — 3 v. u. st. (a—b—c d—e).A l. (a—b—c+d—e).A
—— — 2 v. u. st. (a—b—c d).A l. (a—b—c+d).A
—— — 1 v. u. st. c.A d.A l. c.A+d.A

S. 272 Z. 2 v. o. st. b.B b.A l. b.B — b.A
— — 16 v. u. st. b.V b.A l. b.V = b.A
— — 11 v. u. st. B C l. B — C
— — 10 v. u. st. a.B a.C a.D l. a.B — a.C — a.D
— — 8 v. u. st. d.B d.C l. d.B — d.C
— — 6 v. u. st. b C b B l. b.C — b B
auch sind auf dieser Seite mehrere Punkte oder Multiplicationszeichen weggeblieben.
- 274 - 4 v. o. st. 2) Zus. l. 4) Zus.
— — 2 v. u. st. 108 l. 104
- 279 - 12 v. o. st. 1) Zus. l. [I. 1) Zus.]
- 286 - 5 v. u. st. = 31 = 0 l. = 31 — 31 = 0
- 288 - 3 v. u. muß es heißen:

$$\overset{*}{8} \dagger \overset{*}{5} \dagger 17 \dagger \overset{*}{4} \dagger 21 \dagger 10$$

- 289 - 2 v. u. st. 2 l. $\overset{*}{2}$
- 290 - 1 v. o. st. 3 l. $\overset{*}{3}$
- 291 - 2 v. o. muß es heißen:

$$\overset{*}{5} \dagger 3 \dagger \overset{*}{11} \dagger 19 \dagger 7 \dagger \overset{*}{15} \dagger 2 = 0$$

- 292 - 10 v. o. st. — 12 l. — $\overset{*}{12}$
— — 11 v. o. st. — 5 l. — $\overset{*}{5}$
- 293 - 7 v. o. st. (C — A) l. $\dot{-}$(C — A)
- 296 - 5 v. u. st. 7 l. $\overset{*}{7}$
- 297 - 13 v. o. st. 7 l. $\overset{*}{7}$
— — 14 v. o. st. 5 l. $\overset{*}{5}$
— — 16 v. o. st. 5 l. $\overset{*}{5}$
- 299 - 1 v. u. st. I) l. I] u. st. II) l. II]
- 300 - 15 v. u. st. 146608 l. $14\overset{*}{6}608$
- 303 - 18 v. o. st. ($\dot{-}$D:m l. ($\dot{-}$D):m
— — 19 v. o. st. ($\dot{-}$m l. ($\dot{-}$m)
— — 1 v. u. muß es heißen:

$$\frac{\beta}{\alpha}.(\dot{-}B) = \dot{-}\left(\frac{\beta}{\alpha}.B\right)$$

- 304 - 2 v. o. st. $\left(B:\frac{\alpha}{\beta}\right)$ l. $\dot{-}\left(B:\frac{\alpha}{\beta}\right)$
— — 8 v. u. st. 3;5 l. 3;$\overset{*}{5}$
— — 2 v. u. st. 2) Zus. l. 2. Zus.
- 305 - 10 v. o. st. $\dot{-}\frac{17}{6}$ l. $\dot{-}\frac{17}{6}$

S.

S. 309 Z. 5 v. o. st. 22.] l. 22. 5)]
= 310 = 2 v. o. st. $a^q : a$ l. $a^q : a^p$
= 312 = 10 v. u. st. $(a.b)^m$ l. $(a.b)^{\overset{*}{m}}$
—— — 9 v. u. st. oben l. eben
—— — 7 v. u. st. $a^m. b^m$ l. $a^{\overset{*}{m}}. b^{\overset{*}{m}}$
= 314 = 2 v. u. st. $+2-$ l. $+\overset{*}{2}-$
= 316 = 3 v. u. st. $-\overset{*}{2}+\overset{*}{3}+5-\overset{*}{7}$ l. $+\overset{*}{2}+\overset{*}{3}+5+\overset{*}{7}$
= 317 = 9 v. u. st. $-\overset{*}{3}$ l. $-\overset{*}{3}$
= 319 = 10 v. o. muß es heißen:

$$4+(7-\overset{*}{9}+\overset{*}{14}+2-\overset{*}{15}-7)=4+7-\overset{*}{9}+\overset{*}{14}$$

—— — 13 v. o. st. $-\overset{*}{14}$ l. $+\overset{*}{14}$
= 320 = 1 v. o. st. —H l. —H)
= 321 = 1 v. u. st. +24.D l. —24.D
= 325 = 1 v. o. st. Zus. l. Zus.)
—— — 2 v. o. st. ∸D l. ∸D
—— — 3 v. o. st. (∸H) l. (∸H)]
—— — 5 v. o. st. (∸G l. (∸G)
—— — 13 v. u. st. (A l. A
= 327 = 1 v. o. st. (6—7+3—8) l. $(6-7+\overset{*}{3}-8)$
= 329 = 4 v. o. st. (·b l.) (∸b)
—— — 5 v. o. st. .] l.]
—— — 10 v. o. st. +[∸(e.A) l. +[∸(e.A)]
—— — 5 v. u. st. ist, l. ist,)
= 330 = 5 v. u. st. E l. E)
= 333 = 4 v. o. st. $-\overset{*}{17}$ l. $+\overset{*}{17}$
—— — 9 v. o. st. 84 l. $\overset{*}{84}$
—— — 11 v. o. st. Zusatz l. 1) Zusatz
—— — 7 v. u. st. 12) Zus. l. 12. Zus.
= 334 = 5 v. o. statt (3.a—7.b—4.c) (9.a—11.b, lies:
(3.a—7.b—4.c).(9.a—11.b
= 335 = 9 v. u. st. $+c^2$ l. $+c^2$)
= 336 = 6 v. u. st. $b^n{}_{+1}$ l. b^{n+1}
= 343 = 3 v. o. st. Neuner l. Neunen
352 = 1 v. u. st. $c.d^\delta$ l. $c^\gamma d^\delta$

Ein-

Einleitung.

1. Erklärung.

Ein jedes Ding, welches einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, oder wobey sich auch nur Vermehrung oder Verminderung als möglich denken läßt, so daß das Ding ein Ding seiner Art bleibt, heißt eine Größe. Derowegen sind z. B. Linien von bestimmter Länge, Gewichte, Zeiträume u. s. w. Größen.

2. Erklärung. Größen sind gleichartig, wenn sie entweder gleich, oder doch so beschaffen sind, daß die eine durch Vermehrung oder Verminderung der andern entstehen kann; sonst sind sie ungleichartig. So sind z. B. zwo Linien gleichartig, eben so zwey Gewichte, zween Zeiträume u. s. w. eine Linie aber und ein Gewicht sind ungleichartige Größen.

3. Erklärung. Von einer Größe kann man nur auf zweyerley Art einen Begriff bekommen, entweder unmittelbar vermittelst der sinnlichen Empfindung, oder durch Vergleichung mit einer andern gleichartigen, die man als bekannt ansieht. Von einer Länge kann man z. B. einen Begriff bekommen entweder unmittelbar durch Hülfe des Gesichts, oder dadurch, daß man untersucht, wievielmal eine andere Länge, die man als bekannt ansieht, z. B. eine Elle oder eine Meile, in ihr enthalten ist. Von einem Gewichte kann man einen Begriff bekommen entweder unmittelbar durch Hülfe des Gefühls, dadurch daß man es auf-

 hebt,

hebt, oder dadurch daß man untersucht, wievielmal ein anderes Gewicht, das man als bekannt ansieht, z. B. ein Pfund, darin enthalten ist. Sich auf die letztere Art einen Begriff von einer Größe machen, heißt dieselbe ausmessen, und diejenige Größe, mit der man ausmißt, heißt das Maaß.

4. Erklärung. Die Mathematik ist die Wissenschaft, welche lehret, wie man durch Hülfe des Verstandes oder durch Schlüsse Größen bestimmen und mit einander vergleichen kann.

5. Erklärung. Zwey Dinge sind gleichartig, in so fern sie sich unter einen gemeinschaftlichen Namen oder Begriff bringen lassen.

6. Bemerkung. Eine Menge gleichartiger Dinge ist eine Größe. Denn man kann sich noch mehrere solcher Dinge hinzugesetzt oder einige davon hinweg denken, und es bleibt doch noch ein Ding seiner Art, oder eine Menge gleichartiger Dinge.

7. Bemerkung. Um von einer solchen durch Verbindung einer Menge gleichartiger Dinge entstandenen Größe einen Begriff zu bekommen, kann man das gleichartige Ding als Maaß annehmen, und untersuchen, aus wieviel solchen gleichartigen Dingen die Größe bestehe.

8. Erklärung. Diese Bestimmung, aus wieviel gleichartigen Dingen eine Menge gleichartiger Dinge bestehe, sowohl, als auch im Allgemeinen die Bestimmung, wievielmal das Maaß in der auszumessenden Größe enthalten ist, leitet uns auf den Begriff von einer Zahl. Genau genommen wird das Wort Zahl in einer doppelten Bedeutung gebraucht. Wenn nämlich eine Größe oder ein Theil davon mehrmal genommen wird, so heißt sowohl dasjenige, was anzeigt, wievielmal die Größe genommen worden ist, als auch dasjenige selbst, was durch diese wiederholte Zusammensetzung oder Zusammennehmung entsteht, in so fern es dadurch entsteht, eine Zahl. Diejenige Größe aber,

welche

welche oder welcher Theile mehrmals genommen wird, oder werden, heißt die Einheit.

9. Bemerkung. Wenn eine Größe oder ein Theil davon mehrmal genommen wird, so entsteht offenbar wieder eine Größe, welche der vorigen gleichartig ist. Wenn man also das Wort Zahl in der andern Bedeutung nimmt, so ist eine Zahl eine Größe, und zwar diejenige Größe, welche entsteht, wenn man die Zahl (das Wort hier in der ersten Bedeutung genommen) auf die angenommene Einheit bezieht. Es entsteht daher eine Zahl in der andern Bedeutung, wenn man eine Zahl in der ersten Bedeutung auf eine gewisse Einheit bezieht. Man pflegt daher auch Zahlen in der andern Bedeutung benannte Zahlen, in der ersten aber unbenannte Zahlen zu nennen; eine benannte Zahl ist daher diejenige, wo eine bestimmte angegebene Einheit zum Grunde liegt, eine unbenannte aber, wobey man sich keine bestimmte Einheit denkt, oder es blos mit dem Kennzeichen zu thun hat, wievielmal die Einheit zusammengesetzt worden ist. Durch Verbindung einer unbenannten Zahl mit einer gewissen Einheit entsteht eine benannte Zahl. So ist z. B. sieben eine unbenannte Zahl, sieben Thaler aber eine benannte, und durch Verbindung der unbenannten Zahl sieben, mit einer gewissen Einheit dem Thaler, entsteht die benannte Zahl sieben Thaler.

10. Erklärung. Wenn man eine Größe dadurch, daß man eine andere gleichartige für die Einheit annimmt, durch eine Zahl ausdrücken will, so kann erstere Größe manchmal durch wiederholte Zusammensetzung der ganzen Einheit erzeugt werden, und dann hat man ganze Zahlen. Manchmal aber wird die erstere Größe durch Zusammensetzung von Theilen der Einheit erzeugt, und dann entsteht ein Bruch, oder eine gebrochne Zahl.

11. Bemerkung. Man kann jede Größe, von welcher Gattung sie auch seyn mag, durch eine Zahl ausdrücken, wenn man eine ihr gleichartige zur Einheit annimmt, und

man hat von jeder Größe, die durch eine Zahl ausgedrückt wird, einen vollständigen Begriff, wenn man außer der Zahl nur noch die Einheit kennt. Wenn man daher durch Ausmessung einen Begriff von einer Größe bekommt, so kann man sie durch eine Zahl ausdrücken, und das Maaß für die Einheit annehmen. Eine Menge gleichartiger Dinge kann deswegen auch durch eine Zahl ausgedrückt werden, wenn man das gleichartige Ding für die Einheit annimmt, und in diesem Falle hat man es gewöhnlich blos mit ganzen Zahlen zu thun. Eine Menge ungleichartiger Dinge aber kann keine Zahl hervorbringen; sind daher Dinge in gewisser Rücksicht gleichartig, in anderer aber nicht, so können sie blos in so fern als sie gleichartig sind, eine Zahl ausmachen, das heißt, in so fern sie eine gemeinschaftliche Eigenschaft besitzen, und diese gemeinschaftliche Eigenschaft bestimmt die Einheit. So machen z. B. zween Engländer, drey Deutsche und vier Spanier zusammen weder neun Engländer, noch neun Deutsche, noch neun Spanier, sondern neun Europäer aus, und die Eigenschaft, die sie gemein haben, daß sie alle Europäer sind, bestimmt die Einheit.

12. **Erklärung.** Die Arithmetik ist derjenige Theil der Mathematik, worin man die Größen entweder als Zahlen (s. vorige Bemerkung), oder wenigstens so betrachtet, daß man nicht auf die Ordnung und Verbindung ihrer Theile Rücksicht nimmt.

13. **Erklärung.** Addiren heißt eine Größe finden, die durch Vereinigung mehrerer gleichartiger Größen entsteht. Die zu vereinigenden Größen heißen Summanden, und die durch die Vereinigung hervorgebrachte Größe die Summe. Demnach ist die Summe eine mit allen Summanden gleichartige Größe.

14. **Erklärung.** Subtrahiren heißt eine Größe finden, die zu einer gegebenen Größe, die der Subtrahend heißt, hinzu addirt, eine andere gegebene Größe, die

der Minuend heißt, hervorbringt. Die zu suchende Größe heißt der Unterschied, oder die Differenz, oder der Rest. Es müssen also Minuend, Subtrahend und Rest gleichartige Größen seyn.

15. Erklärung. Multipliciren heißt, die Summe finden, die herauskommt, wenn man soviel einer gegebenen Größe gleiche Summanden zusammen addirt, als eine gegebene Zahl anzeigt. Die gegebene Größe heißt der Multiplicand, die gegebene Zahl der Multiplicator, und die zu suchende Größe das Product. Es müssen demnach der Multiplicand und das Product gleichartige Größen, der Multiplicator aber allemal eine unbenannte Zahl seyn.

16. Erklärung. Dividiren heißt eine Größe finden, die mit einer gegebenen unbenannten Zahl multiplicirt, eine gegebene Größe hervorbringt. Die gegebene unbenannte Zahl heißt der Divisor, die gegebene Größe der Dividend, und die zu suchende Größe der Quotient. Es müssen demnach der Dividend und Quotient gleichartige Größen, der Divisor aber allemal eine unbenannte Zahl seyn.

Erstes

Erstes Kapitel.

Von der Art ganze Zahlen zu bezeichnen und auszusprechen.

1. Willkührlicher Satz.

Die ersten ganzen Zahlen, welche aus soviel Einheiten bestehen, als daneben Sternchen stehen, werden nach der Reihe also ausgesprochen:

Eins *
Zwey * *
Drey * * *
Vier * * * *
Fünf * * * * *
Sechs * * * * * *
Sieben * * * * * * *
Acht * * * * * * * *
Neun * * * * * * * * *
Zehn * * * * * * * * * *

2. **Erklärung.** Zehn Einheiten, wie sie im gewöhnlichen Sinne genommen werden, heißen eine Einheit der ersten Ordnung, oder ein Zehner; zehn Einheiten der ersten Ordnung heißen eine Einheit der zweiten Ordnung, oder ein Hunderter; zehn Einheiten der zweiten Ordnung heißen eine Einheit der dritten Ordnung, oder ein Tausender; zehn Einheiten der dritten Ordnung heißen eine Einheit der vierten Ordnung; zehn Einheiten der vierten Ordnung heißen eine Einheit der fünften Ordnung, u. s. w.

3. **Erklärung.** Die Zeichen, deren man sich bedient, um Zahlen zu schreiben, heißen Ziffern, und sind folgende:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Das

Das Zeichen

0 heißt eine Null, und bedeutet gar keine			Einheiten, sowohl gewöhnliche, als auch Einheiten v. höhern Ordnungen.
1 „ „ Eins,	„ „	eine	
2 „ „ Zweye,	„ „	zwey	
3 „ „ Dreye,	„ „	drey	
4 „ „ Viere,	„ „	vier	
5 „ „ Fünfe,	„ „	fünf	
6 „ „ Sechse,	„ „	sechs	
7 „ „ Sieben,	„ „	sieben	
8 „ „ Achte,	„ „	acht	
9 „ „ Neune,	„ „	neun	

0 wird gar nicht ausgesprochen; 1 wird ausgesprochen eins, und in Verbindung mit andern Ziffern ein; 2 wird ausgesprochen zwey, und so die übrigen Ziffern, so wie hier angegeben worden ist.

4. Willkührlicher Satz. Eine Ziffer ganz allein geschrieben deutet blos gewöhnliche Einheiten an, z. B. 7 ganz allein geschrieben bedeutet sieben gewöhnliche Einheiten. Werden aber mehrere Ziffern neben einande geschrieben, so bezieht sich, von der Rechten nach der Linken zu gerechnet, die erste auf gewöhnliche Einheiten, die zweyte auf Einheiten der ersten Ordnung, die dritte auf Einheiten der zweyten Ordnung, die vierte auf Einheiten der dritten Ordnung, u. s. w. Z. B. 7429 bedeutet neun gewöhnliche Einheiten, zwey Einheiten der ersten, vier Einheiten der zweyten, und sieben Einheiten der dritten Ordnung.

1) Zusatz. Wenn in einer Stelle eine Null vorkommt, so zeigt diese an, daß keine Einheiten derjenigen Art vorhanden sind, worauf sich eine Ziffer in dieser Stelle bezieht. Z. B. 907 bedeutet sieben gewöhnliche Einheiten, und neun Einheiten der zweyten Ordnung; 50087 bedeutet sieben gewöhnliche Einheiten, acht Einheiten der ersten und fünf Einheiten der vierten Ordnung; ferner 3500 fünf Einheiten

heiten der zweyten, und drey Einheiten der dritten Ordnung; endlich 700000 sieben Einheiten der fünften Ordnung.

2) Zusatz. Die Nullen dürfen aber nicht weggelassen werden, weil sonst die etwas anzeigenden Ziffern in andere Stellen rücken, mithin sich auf Einheiten anderer Ordnungen beziehen würden, Wollte man z. B. bey der Zahl 907 die Null weglassen, und sie blos so schreiben 97, so würde die Neune nun sich auf Einheiten der ersten Ordnung beziehen, da sie doch Einheiten der zweyten Ordnung anzeigen sollte. Am weitesten zur Linken aber kann man soviel Nullen als man will anhängen, ohne dadurch die Bedeutung der Zahl zu ändern, z. B. die Zahlen 000975, 00975, 0975, 975 würden alle einerley bedeuten, weil die etwas bedeutenden Ziffern bey allen in einerley Stelle stehen. Gewöhnlich werden die Zahlen so geschrieben, daß die Ziffer am weitesten zur Linken keine Null ist.

3) Zusatz. Daß auf die angezeigte Art Zahlen durch Ziffern geschrieben werden können, ist offenbar, und wenn irgend eine Zahl auf diese Art durch Ziffern geschrieben werden kann, so kann man auch die nächstfolgende, oder um eins größere durch Ziffern schreiben, nach folgender Aufgabe:

5. Aufgabe. Auf eine durch Ziffern geschriebene Zahl die nächst größere zu schreiben.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn bey der schon geschriebenen Zahl die Ziffer am weitesten zur Rechten keine Neune ist, so schreibe man statt ihr die nächst höhere Ziffer, und lasse die übrigen ungeändert. Z. B. die gegebene mit Ziffern geschriebene Zahl sey

8375

so ist die folgende 8376.

Zweyter Fall. Wenn die schon geschriebene Zahl sich mit einer oder mehrern hinter einander geschriebenen

Neu-

Neunen endigt, jedoch auch noch andere Ziffern als Neunen darin befindlich sind, so setze man, von der Rechten nach der Linken zu gehend, statt jeder Neune eine Null, statt der nächsten Ziffer, auf die man nun kommt, und die also keine Neune ist, die nächst höhere, und wenn noch mehrere Ziffern weiter zur Linken da sind, so lasse man diese ungeändert, z. B.

auf die Zahl	79	auf die Zahl	3429
folgt	80	folgt	3430
auf die Zahl	59999	auf die Zahl	784999
folgt	60000	folgt	785000.

Dritter Fall. Wenn alle Ziffern der geschriebenen Zahl Neunen sind, so schreibe man statt jeder Neune eine Null, und setze am weitesten zur Linken eine Eins. Z. B. auf die Zahl

99999

folgt 100000.

Beweis.

Der erste Fall bedarf keines Beweises.

Im zweyten Falle kommen zu den neun gewöhnlichen Einheiten bey der Zahl 784999 noch eine hinzu, das macht zusammen zehn gewöhnliche Einheiten, oder eine Einheit der ersten Ordnung; diese mit den schon vorhandenen neun Einheiten der ersten Ordnung verbunden, giebt eine Einheit der zweyten Ordnung; diese mit den schon vorhandenen neun Einheiten der zweyten Ordnung verbunden, giebt eine Einheit der dritten Ordnung; diese mit den schon vorhandenen vier Einheiten der dritten Ordnung verbunden, giebt fünf Einheiten der dritten Ordnung. Es sind also nun vorhanden fünf Einheiten der dritten, acht Einheiten der vierten, und sieben Einheiten der fünften Ordnung; aber gewöhnliche Einheiten, so wie auch Einheiten der ersten und zweyten Ordnung giebt es weiter nicht, also wird die nächstfolgende Zahl richtig geschrieben 785000.

Wenn

Wenn im dritten Falle zu der Zahl 99999 noch eine Einheit hinzukommt, so wird eben so wie im zweyten Falle bewiesen, daß dann eine Einheit der fünften Ordnung da ist, welche so geschrieben wird 100000.

1) Zusatz. Wenn man also irgend eine Zahl durch Ziffern ausdrücken oder schreiben kann, so kann man auch alle größere Zahlen durch Ziffern schreiben. Nun kann man aber wegen (4.) alle Zahlen von eins bis neun durch einzelne Ziffern, und die Zahl Zehn, als eine Einheit der ersten Ordnung, so schreiben 10, folglich kann man auch alle größere Zahlen, mithin alle Zahlen auf die angezeigte Art entweder durch eine Ziffer, oder Verbindung mehrerer Ziffern schreiben und ausdrücken.

2) Zusatz. Daraus aber, daß jede ganze Zahl entweder durch eine Ziffer, oder durch Verbindung oder Nebeneinandersetzung von mehrern Ziffern in der beschriebenen Art ausgedrückt werden kann, folgt noch nicht, daß jede ganze Zahl nur auf eine einzige Art geschrieben werden könne, oder mit andern Worten, daß zwo von einander unterschiedene Verbindungen von Ziffern allemal auch verschiedene Zahlen bedeuten müßten. Ob dieses statt finde oder nicht, soll nun untersucht werden.

a) Weder zwo verschiedene einzelne Ziffern, noch zwo verschiedene aus mehr als einer, jedoch aus gleichviel Ziffern bestehende Verbindungen derselben können einerley Zahl bedeuten. Denn zwo verschiedene Ziffern, z. B. 7 und 5, ganz allein hingeschrieben, bedeuten offenbar verschiedene Zahlen, und zwar die höhere 7 eine größere Zahl als die niedrigere 5. Hat man aber zwo verschiedene, aus mehr als einer, jedoch aus gleichviel Ziffern bestehende Verbindungen, so müssen, wenn man bey beyden von der Linken nach der Rechten zu gehend die Ziffern, die in einerley Stellen stehen, mit einander vergleicht, nothwendig einmal in einer Stelle zuerst verschiedene Ziffern angetroffen werden, und daß die Zahl, wo in der gedachten Stelle die höhere Ziffer

steht,

steht, größer als die andere, worin also die niedrigere Ziffer vorkommt, seyn müsse, läßt sich so darthun. Ist die gedachte Stelle, worin zuerst verschiedene Ziffern vorkommen, die letzte am weitesten zur Rechten, so folgt die Richtigkeit der Behauptung aus dem ersten Falle der vorgetragenen Aufgabe, denn nach selbigen ist z. B. 3871 größer als 3870, 3872 größer als 3871 u. s. w. Ist die gedachte Stelle aber nicht die letzte am weitesten zur Rechten befindliche, hat man z. B. zwo siebenziffrige Zahlen, die sich beyde mit 28 anfangen, und wo in der folgenden Stelle die erste Abweichung vorkommt, so läßt sich die Sache so erweisen: Die größte siebenziffrige Zahl, wo die drey ersten oder Anfangsziffern am weitesten zur Linken 280 sind, ist 2809999, und die kleinste siebenziffrige Zahl, wo die drey Anfangsziffern 281 sind, ist 2810000. Da aber nach dem zweyten Falle der vorgetragenen Aufgabe 2810000 um eins größer ist als 2809999, so ist die kleinste siebenziffrige Zahl mit den drey Anfangsziffern 281 größer, als die größte siebenziffrige Zahl mit den drey Anfangsziffern 280, mithin jede siebenziffrige Zahl mit den Anfangsziffern 281 größer als jede siebenziffrige Zahl mit den Anfangsziffern 280. Eben so wird erwiesen, daß jede siebenziffrige Zahl mit den Anfangsziffern 282 größer als jede siebenziffrige Zahl, deren Anfangsziffern 281 sind, u. s. w. seyn müsse, und so erhellet die Sache auch für diesen Fall.

b) Die größte dreyziffrige Zahl ist 999 und die kleinste vierziffrige 1000, weil nach [4. 2) Zus.] die Ziffer am weitesten zur Linken keine Null seyn darf. Nun ist nach dem dritten Falle der vorgetragenen Aufgabe 1000 um eins mehr als 999, also die kleinste vierziffrige Zahl größer als die größte dreyziffrige, mithin jede vierziffrige Zahl größer als jede dreyziffrige. Eben so wird bewiesen, daß jede fünfziffrige Zahl größer als jede vierziffrige, jede sechsziffrige größer als jede fünfziffrige u. s. w. seyn müsse, und so erhellet, daß jede mit mehr Ziffern ausgedrückte Zahl größer

als

als jede mit weniger Ziffern ausgedrückte ist, folglich zwey mit ungleich viel Ziffern geschriebene Zahlen ebenfalls unmöglich gleich seyn können.

Sollen demnach zwo Zahlen einander gleich seyn, so müssen sie vermöge b) mit gleichviel Ziffern, und auch dann vermöge a) übrigens vollkommen einerley geschrieben seyn. Es läßt sich demnach jede Zahl zwar auf eine, jedoch auch nur auf eine Art durch Ziffern schreiben und ausdrücken, und man ist aus dem hier angeführten zugleich im Stande, bey zwo verschieden ausgedrückten, mithin auch an sich verschiedenen Zahlen zu beurtheilen, welche von beyden die größere ist.

3) Zusatz. Soll eine Zahl geschrieben werden, die um eine Einheit einer höhern Ordnung größer ist, als eine gegebene mit Ziffern geschriebene Zahl, so schneide man bey dieser von der Rechten nach der Linken zu gehend soviel Ziffern in Gedanken vermittelst eines Verticalstrichs ab, als die höhere Ordnung anzeigt, statt der zur Linken des Verticalstrichs stehenden Zahl schreibe man die nächsthöhere, und lasse die zur Rechten desselben befindliche ungeändert. Sollen z. B. Zahlen geschrieben werden, die um eine Einheit der vierten Ordnung größer sind als folgende

8375|7513		8376|7513
79|0384		80|0384
3429|6400	so sind es diese	3430|6400
59999|7378		60000|7378
784999|1837		785000|1837
99999|6592		100000|6592

Der Beweis ist eben so wie oben. Es hat aber auch keine Schwierigkeit, diese Forderung zu erfüllen, wenn die gegebene Zahl aus gerade soviel oder weniger Ziffern bestände, als die gegebene höhere Ordnung anzeigt. Soll man z. B. die Zahlen 783942 und 4786 um eine Einheit der sechsten Ordnung erhöhen, so erhält man 1783942 und 1004786.

6. **Lehrsatz.** Eine Zahl auf Einheiten einer höhern Ordnung bezogen, kann durch gewöhnliche Einheiten ausgedrückt werden, wenn man zur Rechten soviel Nullen anhängt, als die höhere Ordnung anzeigt. Wenn z. B. die Größe B in Rücksicht der Größe A eine Einheit der fünften Ordnung ist, so ist 473 auf B als Einheit bezogen, soviel als 47300000 auf A als Einheit bezogen.

Beweis.

Das zehnfache von B heiße C, und das zehnfache von C heiße D, so ist in Rücksicht von B C eine Einheit der ersten und D eine Einheit der zweyten Ordnung; in Rücksicht von A aber ist B eine Einheit der fünften, mithin C eine Einheit der sechsten, und D eine Einheit der siebenten Ordnung. Eine Größe demnach, die aus dem Vierfachen von D, dem Siebenfachen von C und dem dreyfachen von B zusammengesetzt ist, kann sowohl durch die Zahl 473 auf B als Einheit bezogen, als auch durch die Zahl 47300000 auf A als Einheit bezogen ausgedrückt werden, folglich ist beydes einerley, das heißt 473 Einheiten der fünften Ordnung sind soviel als 47300000 gewöhnliche Einheiten.

7. **Erklärung.** Eine, zwey, drey, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun Einheiten der ersten Ordnung werden ausgesprochen: zehn, zwanzig, dreyßig, vierzig, funfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig.

8. Aufgabe. Eine mit zwo Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen.

Auflösung.

Erster Fall. Ist die letzte Ziffer zur Rechten eine Null, so ergiebt sich die Aussprache aus (7.), z. B. 40 wird ausgesprochen v i e r z i g.

Zweyter Fall. Ist aber die letzte Ziffer zur Rechten keine Null, so spricht man diese letzte Ziffer nach (3.) aus, setzt

setzt das Wort und hinzu, und spricht dann die Ziffer zur Linken nach (7.) aus. Z. B. die Zahlen

23 } werden ausgesprochen { drey und zwanzig,
31 } werden ausgesprochen { ein und dreyßig,
79 } werden ausgesprochen { neun und siebenzig.

Ausnahme. Ist 1 die Ziffer zur Linken, so wird das Wort und weggelassen, z. B. 17 wird ausgesprochen siebenzehn; endlich wird die Zahl 11 kurz durch eilf, und 12 durch zwölf ausgesprochen.

9. Aufgabe. Eine mit drey Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen.

Auflösung.

Erster Fall. Sind die beyden letzten Ziffern zur Rechten Nullen, so spricht man blos die Ziffer zur Linken nach (3.) aus, und setzt das Wort hundert hinzu. Z. B. 600 wird ausgesprochen sechshundert.

Zweyter Fall. Ist aber blos die mittelste Ziffer eine Null, so spricht man die Ziffer zur Linken nach (3.) aus, setzt die Worte hundert und dazu, und spricht dann auch die Ziffer zur Rechten nach (3.) aus. Z. B. 709 wird ausgesprochen siebenhundert und neun.

Dritter Fall. Ist die mittelste Ziffer keine Null, so spricht man zuerst die Ziffer zur Linken nach (3.) aus, setzt die Worte hundert und dazu, und spricht dann die beyden letzten Ziffern zur Rechten nach (8.) aus. Z. B. es ist die Aussprache der Zahlen

630 sechshundert und dreyßig,
517 fünfhundert und siebenzehn,
938 neunhundert und acht und dreyßig.

10. Aufgabe. Eine mit vier, fünf oder sechs Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen.

Auf-

Auflösung.

Man sondere von der Rechten nach der Linken zu gehend die drey ersten Ziffern entweder in Gedanken oder wirklich durch einen Verticalstrich ab.

Erster Fall. Sind die drey Ziffern zur Rechten des Verticalstrichs Nullen, so spricht man blos die zur Linken desselben stehende Zahl nach (3.), (8.) oder (9.) aus, je nachdem sie aus einer, zwo oder drey Ziffern besteht, und setzt das Wort tausend hinzu. Z. B. es ist die Aussprache der Zahlen

3|000 dreytausend,
27|000 sieben und zwanzig tausend,
397|000 dreyhundert und sieben und neunzig tausend.

Zweyter Fall. Ist die Ziffer zur Rechten des Verticalstrichs keine Null, so spreche man die Zahl links desselben nach (3.), (8.) oder (9.) aus, setze das Wort tausend hinzu, und spreche dann auch die zur Rechten des Verticalstrichs aus drey Ziffern bestehende Zahl nach (9.) aus. Z. B. die Aussprache der Zahl 47|874 ist sieben und vierzig tausend achthundert und vier und siebenzig.

Dritter Fall. Ist die Ziffer zur Rechten des Verticalstrichs Null, so spreche man zuerst die Zahl links desselben nach (3.), (8.) oder (9.) aus, setze die Worte tausend und dazu, und spreche hierauf die zur Rechten des Verticalstrichs befindliche Zahl nach (8.) aus, wenn die mittelste Ziffer davon nicht 0 ist, oder nach (3), wenn sie 0 ist. Z. B. die Zahl 375|071 wird ausgesprochen dreyhundert und fünf und siebenzig tausend, und ein und siebenzig; ingleichen die Zahl 409|003 vierhundert und neuntausend und drey.

Beweis.

Daß der zur Linken des Verticalstrichs befindliche Theil der Zahl richtig ausgesprochen wird, wenn man ihn so ausspricht, als wenn weiter nichts zur Rechten vorhanden wäre,

und

und blos das Wort tausend hinzusetzt, erhellet aus (6.). Denn z. B. die Zahl 47874 besteht aus den beyden Theilen 47000 und 874; der erstere ist nach (6.) soviel als 47 Einheiten der dritten Ordnung, also spricht man ihn richtig durch sieben und vierzig tausend aus.

11. **Erklärung.** Eine Einheit der sechsten Ordnung heißt eine Million, eine Million Millionen heißt eine Billion, eine Million Billionen heißt eine Trillion, und so ist verständlich, was eine Quatrillion, Quinquillion u. s. w. seyn werde.

Zusatz. Eine Billion ist also soviel als 1000000 Millionen, oder 1000000 Einheiten der sechsten, oder nach (6.) eine Einheit der zwölften Ordnung; demnach eine Trillion soviel als 1000000 Billionen, oder 1000000 Einheiten der zwölften, oder nach (6.) eine Einheit der achtzehnten Ordnung, und so wird ferner erwiesen, daß eine Quatrillion eine Einheit der vierundzwanzigsten, eine Quinquillion eine Einheit der dreyßigsten Ordnung u. s. w. sey.

12. **Aufgabe.** Eine mit mehr als sechs Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen.

Auflösung.

1) Man theile sie, von der Rechten nach der Linken zu gehend, in Classen, so daß jede Classe sechs Ziffern bekommt; die Classe am weitesten zur Linken kann auch weniger Ziffern enthalten.
2) Die zweyte Classe von der Rechten nach der Linken zu bezeichne man mit einer kleinen 1, welches Millionen, die dritte Classe mit einer kleinen 2, welches Billionen bedeutet, u. s. w.
3) Spreche man, von der Linken nach der Rechten zu gehend, jede Classe nach (3.), (8.), (9.) oder (10.) aus, und setze bey den höhern Classen die Worte Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. hinzu, je nachdem die

Classen

Classen mit einer kleinen 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnet sind.

Beyspiel. Es sey gegeben die Zahl

4739806723493021389427

so hat man nach der Vorschrift 1)

4739|806723|493021|389427

nach der Vorschrift 2)

$\overset{3}{4739}|\overset{2}{806723}|\overset{1}{493021}|389427$

und nun läßt sich die Zahl nach der Vorschrift 3) also aussprechen: Viertausend siebenhundert und neununddreyßig Trillionen; achthundert und sechstausend siebenhundert und dreyundzwanzig Billionen; vierhundert und dreyundneunzig tausend und einundzwanzig Millionen; dreyhundert und neunundachtzig tausend, vierhundert und siebenundzwanzig.

Zusatz. Kämen in einer Classe lauter Nullen vor, so wird diese Classe gar nicht ausgesprochen, und kämen in irgend einer Classe zur Linken mehrere hinter einander geschriebene Nullen vor, so werden diese sich hinweggedacht nach (4. 2) Zus.). Wären aber in der letzten Classe zur Rechten die vier höchsten Ziffern 0, so wird vor dem Aussprechen dieser letzten Classe das Wort u n d gesetzt.

Beyspiel. Es sey gegeben die Zahl

8790000000000380900074

so hat man nach der Vorschrift 1) und 2)

$\overset{3}{87900}|\overset{2}{000000}|\overset{1}{003809}|000074$

und nach der Vorschrift 3) wird die Zahl ausgesprochen: Siebenundachtzig tausend neunhundert Trillionen; dreytausend achthundert und neun Millionen; und vier und siebenzig.

Anmerkung. Wenn die Ziffer 1 nach (3.) auszusprechen vorkommt, so wird sie allemal e i n ausgesprochen,

ausgenommen, wenn sie in irgend einer Classe am weitesten zur Rechten, und ihr zunächst zur Linken eine Null steht, so wird sie durch eine ausgesprochen, und je nachdem die Classe anzeigt, das Wort Million, Billion, Trillion u. s. w. hinzugesetzt. Wäre es aber die letzte Classe zur Rechten, so wird sie durch eins ausgesprochen. Z. B. Wäre die Zahl

901006701214793028401

auszusprechen, so hat man nach der Vorschrift 1) und 2)

$\overset{3}{901}|\overset{2}{006701}|\overset{1}{214793}|028401$

und die Zahl wird nach der Vorschrift 3) also ausgesprochen: Neunhundert und eine Trillion; sechstausend siebenhundert und eine Billion; zweyhundert und vierzehntausend siebenhundert und dreyundneunzig Millionen; acht und zwanzigtausend vierhundert und eins.

Beweis.

Der Grund der Aussprache beruhet auf (6.). Denn z. B. die Zahl

4739806723493021389427

besteht aus folgenden Theilen:

4739000000000000000000
806723000000000000
493021000000
389427

oder wegen (6.) aus 4739 Einheiten der achtzehnten Ordnung oder Trillionen nach (11. Zus.); aus 806723 Einheiten der zwölften Ordnung oder Billionen; aus 493021 Einheiten der sechsten Ordnung oder Millionen; und aus 389427 gewöhnlichen Einheiten, woraus die Richtigkeit der angeführten Aussprache erhellet.

13. Aufgabe. Eine ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.

Auf-

Auflösung.

Vorausgesetzt, daß man eine Zahl, worin die Worte Million, Billion u. s. w. nicht vorkommen, mit Ziffern schreiben könne, welches sich aus (3.), (8.), (9.) und (10.) leicht ergiebt, so kann man auch eine Zahl, worin die gedachten Worte vorkommen, nach folgenden Vorschriften schreiben:

1) Man schreibe die ausgesprochene Menge der gewöhnlichen Einheiten, Millionen, Billionen, Trillionen, erst unter einander, und bezeichne die Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. mit einer kleinen 1, 2, 3, wie vorhin.

2) Man schreibe die ausgesprochene Menge der höchsten Einheiten am weitesten zur Linken in die höchste Classe; die Menge der nächst niedrigern Einheiten in die Classe zunächst zur Rechten u. s. w., so daß jede Classe, die nicht die höchste ist, sechs Ziffern enthält. Käme demnach eine höhere Einheit vor, und eine oder mehrere niedrigere nicht, so müssen für jede der nicht ausgesprochenen niedrigern Einheiten sechs Nullen in ihre Classe geschrieben werden. Kämen ferner in einer Classe, die nicht die höchste ist, noch nicht sechs Ziffern vor, so müssen zur Linken soviel Nullen angesetzt werden, bis sechs Ziffern herauskommen.

1) Beyspiel. Die Zahl: sechshundert und neunfunfzig Trillionen; fünfhundert und siebenzig tausend, dreyhundert und sechsundsiebenzig Billionen; vierhundert und neun Millionen, achttausend und eilf zu schreiben.

Nach der Vorschrift 1) hat man

```
   659 3)
570376 2)
   409 1)
  8011
```

und nach der Vorschrift 2)

$65\overset{3}{9}|57037\overset{2}{6}|00040\overset{1}{9}|008011.$

 oder

oder mit Weglassung der Classenstriche und kleinen Ziffern

65957037600040900801I.

2) Beyspiel. Die Zahl: Siebenundfunfzig Quatrillionen; fünfhundert und sieben Trillionen; achthundert und siebenzehntausend, vierhundert und neunundsechzig Millionen, und siebenundachtzig zu schreiben.

Nach der Vorschrift 1) hat man

57 (4
507 (3
817469 (1
87

und nach der Vorschrift 2)

57|000507|000000|817469|000087 (Ordnungsexponenten 4, 3, 2, 1)

oder mit Weglassung der kleinen Ziffern und Classenstriche

570005070000008174690000087.

14. Erklärung. Ordnungsexponenten heißen Zahlen, welche über die Ziffern, womit eine Zahl geschrieben wird, gesetzt werden, und andeuten, von welcher Ordnung die Einheiten sind, auf welche sich die Ziffer bezieht, worüber sie stehen. Bey der Zahl 748963 z. B. bezieht sich nach (4.)

die Ziffer 3 auf gewöhnliche Einheiten,
" " 6 auf Einheiten der ersten Ordnung,
" " 9 " " " zweyten "
" " 8 " " " dritten "
" " 4 " " " vierten "
" " 7 " " " fünften "

deswegen kann die Zahl auch so geschrieben werden:

$\overset{5}{7}\overset{4}{4}\overset{3}{8}\overset{2}{9}\overset{1}{6}3$

wo also die kleinen Zahlen die Ordnungsexponenten sind.

1) Zu-

1) Zusatz. Wenn der Ordnungsexponent einer einzigen Ziffer bekannt ist, so sind auch die Ordnungsexponenten aller andern bekannt. Man braucht also blos eine einzige Ziffer, welche man will, mit ihrem Ordnungsexponenten zu versehen. Z. B. statt der Zahl $\overset{12}{4}\overset{11}{8}\overset{10}{9}\overset{9}{0}\overset{8}{7}$ kann man kurz einen von folgenden Ausdrücken $\overset{12}{4}8907$, $4\overset{11}{8}907$, $48\overset{10}{9}07$, $489\overset{9}{0}7$, $4890\overset{8}{7}$ brauchen, welche alle eben das bezeichnen. Die Bedeutung davon wäre

7 Einheiten der achten Ordnung
0 " " " neunten "
9 " " " zehnten "
8 " " " eilften "
4 " " " zwölften "

Da keine Einheiten von niedrigern Ordnungen als von der achten vorhanden sind, so würde die angeführte Zahl auf die gewöhnliche Art so geschrieben werden:

489070000000

Man kann sich also der Ordnungsexponenten bedienen, um sehr große Zahlen, die sich mit vielen Nullen endigen, kurz zu schreiben.

2) Zusatz. Die Ausdrücke $\overset{12}{4}8907$ und $\overset{12}{4}8907000$ bedeuten einerley, man kann also, wenn man Ordnungsexponenten gebraucht, zur Rechten soviel Nullen als man will anhängen, ohne die Bedeutung der Zahl zu ändern.

15. Bemerkung. Die in (4.) erklärte Art ganze Zahlen zu schreiben heißt das dekadische System, weil die Voraussetzung dabey zum Grunde liegt, daß allemal zehn Einheiten von einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächst höhern ausmachen. Es wäre nicht nöthig gewesen, gerade die Zahl zehn dazu zu wählen; man hätte jede andere kleinere oder größere Zahl dazu wählen können. Im ersten Falle brauchte man weniger, im andern mehr einfache Zeichen

chen oder Ziffern. Hätte man z. B. vorausgesetzt, daß allemal zwey Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächsthöhern Ordnung ausmachen, so brauchte man blos die beyden Ziffern 0 und 1, um alle Zahlen zu schreiben. Die ganzen Zahlen von Eins an würden dann der Reihe nach so geschrieben:

1	10000	11111
10	10001	100000
11	10010	u. s. w.
100	10011	
101	10100	
110	10101	
111	10110	
1000	10111	
1001	11000	
1010	11001	
1011	11010	
1100	11011	
1101	11100	
1110	11101	
1111	11110	

Dies ist Leibnitzens Dyadik. Hätte man aber vorausgesetzt, daß allemal zwölf Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächsthöhern Ordnung ausmachen, so brauchte man außer den gewöhnlichen in (3.) erklärten Ziffern, auch noch eine für die Zahl zehn und eine für die Zahl eilf. Gesetzt also, die Zeichen v und ʌ wären die einfachen Zeichen oder Ziffern für die Zahlen zehn und eilf, so würden die ganzen Zahlen von Eins an nach der Reihe also geschrieben:

1	15	2Λ	9Λ	.	
2	16	30	V0	.	
3	17	31	V1	Λ9	
4	18	32	V2	ΛV	
5	19	.	V3	ΛΛ	
6	1V	.	V4	100	
7	1Λ	.	.	101	
8	20	39	.	102	
9	21	3V	V9	103	
V	22	3Λ	VV	104	
Λ	.	40	VΛ	105	
10	.	.	Λ0	106	
11	.	.	Λ1	107	
12	.	.	Λ2	108	
13	29	99	.	109	
14	2V	9V	.	10V	u. s. w.

Dies wäre also das Duodecadische System. Wahrscheinlich hat der Gebrauch der zehn Finger beym Zählen Veranlassung zu dem fast durchgängig eingeführten decadischen System gegeben. Denn sonst scheint das duodecadische System bequemer zu seyn, weil die Zahl zwölf durch wiederholte Zusammensetzung mehrerer kleinerer Zahlen, nämlich der Zahlen zwey, drey, vier und sechs hervorgebracht werden kann, da hingegen die Zahl Zehn nur durch wiederholte Zusammensetzung der beyden Zahlen zwey und fünf entsteht.

Zwey-

Zweytes Kapitel.

Von der Addition unbenannter Zahlen.

1. Grundsatz.

Wenn man mehrere unbenannte Zahlen (nach Einl. 9.) auf einerley Einheit bezieht, so wird die Summe (Einl. 13.) der daraus entstehenden Größen (nach Einl. 11.) auch durch eine Zahl, welche sich auf eben diese Einheit bezieht, ausgedrückt werden können. Diese Zahl, von welcher die Summe ausgedrückt wird, ist allemal eben dieselbe, man mag für die Einheit annehmen, was man will, oder sie ist von der Art der Einheit ganz unabhängig. Z. B. die Zahlen 8, 6, 3, auf einerley Einheit bezogen, geben zusammenaddirt allemal die Zahl 17 auf ebendieselbe Einheit bezogen.

2. **Erklärung.** Diese unbenannte Zahl, von der die Summe ausgedrückt wird, heißt die Summe der gegebenen unbenannten Zahlen, also ist die unbenannte Zahl 17 die Summe der unbenannten Zahlen 8, 6, 3; und diese Zahl finden, heißt die gegebenen unbenannten Zahlen addiren.

3. **Erklärung.** Die Summe mehrerer gleichartiger Größen wird dadurch angedeutet, daß man dieselben in einer willkührlichen Ordnung neben einander setzt, und zwischen jedes Paar derselben das Zeichen + schreibt. Auf diese Art wird die Summe der gleichartigen Größen A, B, C, D also angedeutet: $A + B + C + D$, oder auch so: $B + D + A + C$.

4. **Erklärung.** Daß zwo Größen A und B einander gleich sind, wird also: $A = B$, oder auch also: $B = A$, angedeutet. Daß aber die Größe A größer als die ihr gleichartige C sey, wird also: $A > C$, oder auch also: $C < A$ angedeutet, dergestalt, daß allemal die Oeffnung des Zeichens

chens 7 gegen die größere, und die Spitze desselben gegen die kleinere Größe gekehrt ist.

Zusatz. Hieraus ist klar, daß die Wahrheit: Die Summe der unbenannten Zahlen 8, 6, 3 ist 17,

also: $8 + 6 + 3 = 17$

oder auch also: $3 + 8 + 6 = 17$

angedeutet werden kann.

Anmerkung. Solche Ausdrücke wie $A = B$, oder $8 + 6 + 3 = 17$, heißen Gleichungen, und die beyden Theile, die auf den beyden Seiten des Gleichheitszeichens $=$ stehen, Glieder der Gleichung; bey der zweyten Gleichung ist daher $8 + 6 + 3$ das eine, und 17 das andere Glied.

5. Aufgabe. Das Eins und Eins, oder eine Tafel zu verfertigen, worin man gleich sehen kann, was die Summe jeder zwo einziffrigen Zahlen sey.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Auflösung.

1) Man schreibe die Reihe der einziffrigen Zahlen von 1 bis 9 oben in eine Horizontalreihe, und seitwärts zur linken in eine Verticalreihe.

2) Un-

2) Unter jede Zahl in der obern Horizontalreihe schreibe man (I. Kap. 5.) die nächsthöhere, darunter wieder die nächsthöhere, und so fahre man fort, bis man in die unterste Horizontalreihe kommt.

6. Aufgabe. Die Summe zwoer einziffrigen Zahlen zu finden.

Auflösung.

1) Man suche in dem Eins und Eins die eine der gegebenen Zahlen in der obern Horizontalreihe, und die andere in der Verticalreihe zur Linken.

2) Man suche dasjenige Fach auf, welches mit der Zahl in der obern Horizontalreihe in einer Verticalreihe, und mit der Zahl in der Verticalreihe zur Linken in einer Horizontalreihe ist. Dieses Fach enthält die gesuchte Summe.

Beyspiele. $6+3=9$; $7+8=15$; $5+9=14$.

Zusatz. Wird o zu einer Zahl addirt, so bleibt sie ungeändert; z. B. $7+0=7$.

Anmerkung. Um im Addiren geschwind fortzukommen, muß man das Eins und Eins auswendig wissen, oder die Summe jeder zwo einziffrigen Zahlen sogleich aus dem Kopfe bestimmen können.

7. Aufgabe. Zu einer vielziffrigen Zahl eine einziffrige zu addiren.

Auflösung.

Man suche nach (6.) die Summe der gegebenen einziffrigen Zahl, und derjenigen, welche mit der letzten Ziffer der vielziffrigen Zahl geschrieben wird; diese Summe ist, wie man sogleich aus dem Eins und Eins übersieht, entweder eine einziffrige Zahl, oder eine zweyziffrige, deren Ziffer zur Linken eine Eins ist.

Erster

Erster Fall. Ist diese Summe eine einziffrige Zahl, so schreibe man dieselbe statt der niedrigsten Ziffer der vielziffrigen Zahl, und lasse die übrigen ungeändert. Z. B.

$3890 + 5 = 3895$ weil $5 + 0 = 5$ nach (6. Zus.)
$3874 + 5 = 3879$ weil $5 + 4 = 9$ nach (6.)

Zweyter Fall. Ist diese Summe eine zweyziffrige Zahl, deren Ziffer zur Linken eine Eins ist, so setze man die niedrigste Ziffer davon statt der niedrigsten Ziffer der vielziffrigen Zahl, und statt der Zahl, welche durch die Ziffern in den höhern Stellen gebildet wird, nach (I. Kap. 5.) die nächst höhere. Z. B.

$376 + 8 = 384$ und $739996 + 7 = 740003$
weil

$\left.\begin{matrix} 8 + 6 = 14 \\ 7 + 6 = 13 \end{matrix}\right\}$ nach (6.) und $\left.\begin{matrix} 37 + 1 = 38 \\ 73999 + 1 = 74000 \end{matrix}\right\}$ (I. Kap. 5.)

Beweis.

Der erste Fall bedarf keines Beweises.

Bey dem zweyten Falle ist nach (6.) und (I. Kap. 5. 3) Zus.)

$$739996 + 7 = 739990 + 6 + 7 = 739990 + 13$$
$$= 739990 + 3 + 10 = 739993 + 10 = 740003.$$

8. Aufgabe. Die Summe von einer gegebenen vielziffrigen Zahl und mehrern gegebenen einziffrigen zu finden.

Auflösung.

Man addire nach (7.) zu der vielziffrigen die erste einziffrige Zahl, zu dem, was herauskommt, die zweyte u. s. w. bis man alle einziffrigen Zahlen addirt hat.

Beyspiel.

$719982 + 7 + 3 + 4 + 8 + 6 + 2 = 720012$

Denn

Denn
$$\left.\begin{array}{r} 719982 + 7 = 719989 \\ 719989 + 3 = 719992 \\ 719992 + 4 = 719996 \\ 719996 + 8 = 720004 \\ 720004 + 6 = 720010 \\ 720010 + 2 = 720012 \end{array}\right\} \text{nach (7.)}$$

1) Zusatz. Man erhält offenbar dieselbe Summe, wenn man auch die einziffrigen Zahlen in einer ganz andern Ordnung addirt.

2) Zusatz. Um mehrere einziffrige Zahlen zu addiren, addire man (6.) zu der ersten die zweyte, zu dem, was herauskommt, die dritte, zu dem, was nun herauskommt, die vierte u. s. w. bis man alle einziffrigen Zahlen addirt hat. Z. B.

$$3 + 4 + 2 + 7 + 8 + 3 + 6 + 9 = 42.$$

Denn
$$\left.\begin{array}{r} 3 + 4 = 7 \\ 7 + 2 = 9 \\ 9 + 7 = 16 \end{array}\right\} \text{nach (6.)}$$
$$\left.\begin{array}{r} 16 + 8 = 24 \\ 24 + 3 = 27 \\ 27 + 6 = 33 \\ 33 + 9 = 42 \end{array}\right\} \text{nach (7.)}$$

Dieselbe Summe erhält man auch, wenn man die einziffrigen Zahlen in einer ganz andern Ordnung zusammen addirt.

9. Lehrsatz. Wenn die Summe mehrerer unbenannter ganzer Zahlen bekannt ist, und man hängt an alle Summanden gleichviel Nullen zur Rechten an, so braucht man, um die Summe der so entstehenden Zahlen zu haben, auch nur an die erste Summe eben soviel Nullen zur Rechten anzuhängen. Z. B. weil nach (8.)

$$719982 + 7 + 3 + 4 + 8 + 6 + 2 = 720012$$

so

so ist auch

$$719982000 + 7000 + 3000 + 4000 + 8000 + 6000 + 2000 = 720012000$$

oder, welches einerley ist, (I. Kap. 14. 1) Zus.)

$$71998\overset{3}{2} + \overset{3}{7} + \overset{3}{3} + \overset{3}{4} + \overset{3}{8} + \overset{3}{6} + \overset{3}{2} = 72001\overset{3}{2}$$

Beweis.

Es sey A irgend eine Größe, und B in Rücksicht A eine Einheit der dritten Ordnung; und wenn neben einer Zahl A oder B geschrieben ist, so bedeute das soviel, daß diese Zahl sich auf A oder B als Einheit bezieht. Weil nun

$$719982 + 7 + 3 + 4 + 8 + 6 + 2 = 720012$$

so ist nach (1. und 2.)

$$719982B + 7B + 3B + 4B + 8B + 6B + 2B = 720012B$$

oder, welches (I. Kap. 6.) einerley ist,

$$719982000A + 7000A + 3000A + 4000A + 8000A + 6000A + 2000A = 720012000A$$

folglich, da A alles seyn kann, nach (1. und 2.)

$$719982000 + 7000 + 3000 + 4000 + 8000 + 6000 + 2000 = 720012000.$$

Zusatz. Da nach (8. 2) Zus.)

$$3 + 4 + 2 + 7 + 8 + 3 + 6 + 9 = 42$$

so ist aus eben dem Grunde

$$300 + 400 + 200 + 700 + 800 + 300 + 600 + 900 = 4200$$

oder, welches einerley ist,

$$\overset{2}{3} + \overset{2}{4} + \overset{2}{2} + \overset{2}{7} + \overset{2}{8} + \overset{2}{3} + \overset{2}{6} + \overset{2}{9} = 4\overset{2}{2}$$

10. Aufgabe. Mehrere vielziffrige Zahlen zusammen zu addiren.

Auf-

Auflösung.

1) Man schreibe die gegebenen vielziffrigen Zahlen so unter einander, daß alle Ziffern, die sich auf Einheiten von einerley Ordnung beziehen, unter einander zu stehen kommen, welches allemal erhalten wird, wenn die letzten Ziffern zur Rechten gerade unter einander stehen, und ziehe unter der untersten einen Horizontalstrich.

2) Man addire, von der Rechten nach der Linken zugehend, alle bedeutlichen einziffrigen Zahlen jeder Verticalreihe nach (8.) oder (8. 2) Zus.) zusammen, und schreibe die gefundene Summe jeder Verticalreihe, wenn sie eine einziffrige Zahl ist, gerade darunter unter den Horizontalstrich; ist sie aber eine mehrziffrige Zahl, so setze man blos die niedrigste Ziffer davon unter den Horizontalstrich, und die Zahl, welche durch die Ziffern in den höhern Stellen gebildet wird, addire man gleich anfangs zur folgenden Verticalreihe zunächst zur Linken. Ist aber keine Verticalreihe zur Linken mehr vorhanden, so wird die gefundene mehrziffrige Summe so unter den Strich geschrieben, daß die niedrigste Ziffer davon unter die addirte Verticalreihe zu stehen kommt.

1) Beyspiel. Die Zahlen 735896, 379417, 786509, 388417, 693329, 10047 zusammen zu addiren.

Nach der Vorschrift 1) hat man

735896		735896
379417		379417
786509	und nach der Vorschrift 2)	786509
388417		388417
693329		693329
10047		10047
		2993615

indem

indem

1) 7 + 9 + 7 + 9 + 7 + 6 = 45
2) 4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 9 = 21
3) 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 8 = 26
4) 2 + 3 + 8 + 6 + 9 + 5 = 33
5) 3 + 1 + 9 + 8 + 8 + 7 + 3 = 39
6) 3 + 6 + 3 + 7 + 3 + 7 = 29

also ist 2993615 die verlangte Summe.

Beweis.

Es ist

$$7+9+7+9+7+6=45=5+\overset{1}{4} \text{ nach 1)}$$

$$\overset{1}{4}+\overset{1}{4}+\overset{1}{2}+\overset{1}{1}+\overset{1}{1}+\overset{1}{9}=\overset{1}{21}=\overset{1}{1}+\overset{2}{2} \text{ nach 2) und (9.)}$$

$$\overset{2}{2}+\overset{2}{3}+\overset{2}{4}+5+\overset{2}{4}+\overset{2}{8}=\overset{2}{26}=\overset{2}{6}+\overset{3}{2} \text{ nach 3) und (9.)}$$

$$\overset{3}{2}+\overset{3}{3}+\overset{3}{8}+\overset{3}{6}+\overset{3}{9}+\overset{3}{5}=\overset{3}{33}=\overset{3}{3}+\overset{4}{3} \text{ nach 4) und (9.)}$$

$$\overset{4}{3}+1+\overset{4}{9}+\overset{4}{8}+\overset{4}{8}+\overset{4}{7}+\overset{4}{3}=\overset{4}{39}=\overset{4}{9}+\overset{5}{3} \text{ nach 5) und (9.)}$$

$$\overset{5}{3}+\overset{5}{6}+\overset{5}{3}+\overset{5}{7}+\overset{5}{3}+\overset{5}{7}=\overset{5}{29} \text{ nach 6) und (9.)}$$

Addirt man nun beyderseits alles zusammen, und läßt zugleich beyderseits die Summe $\overset{1}{4}+\overset{1}{2}+\overset{1}{2}+\overset{1}{3}+\overset{1}{3}$ weg, so erhält man ....

$$10047+693329+388417+786509+379417+735896=2993615.$$

1) Zusatz. Ist die Menge der Summanden groß genug, so ist es möglich, daß die Summe einer Verticalreihe 100 übersteigt, und dann braucht man auch die Aufgabe (8.) in der Rechnung. Dies ist der Fall bey folgendem

2) Beyspiele:

48497
37918
59392
64782
98993
57584
394721
675643
24743836
59549
28098
38097
57534
369618
793925
672417
98973
―――――――
28299577

indem

1) 3 + 7 + 5 + 8 .... + 6 + 3 + 1 .... + 7 = 87
2) 8 + 7 + 1 + 2 + 1 .... + 3 + 4 + 2 .... + 9 = 97
3) 9 + 9 + 4 + 9 + 6 .... + 8 + 6 + 7 .... + 4 = 105
4) 10 + 8 + 2 + 3 + 9 .... + 3 + 5 + 4 .... + 8 = 119
5) 11 + 9 + 7 + 9 + 6 .... + 4 + 7 + 9 .... + 4 = 109
6) 10 + 6 + 7 + 3 + 7 + 6 + 3 = 42
7) 4 + 4 = 8
8) 2 = 2

Hier ist der Beweis dieser:

Vermöge 1) ist

$$3+7+5+8\,..+6+3+1\,..+7=87=7+\overset{1}{8} \text{ und}$$

$$9)\quad \overset{1}{8}+\overset{1}{7}+\overset{1}{1}+\overset{1}{2}+\overset{1}{1}\,..+\overset{1}{3}+\overset{1}{4}+\overset{1}{2}\,..+\overset{1}{9}=97=\overset{1}{7}+\overset{2}{9}$$

$$10)\quad \overset{2}{9}+\overset{2}{9}+\overset{2}{4}+\overset{2}{9}+\overset{2}{6}\,..+\overset{2}{8}+\overset{2}{6}+\overset{2}{7}\,..+\overset{2}{4}=\overset{2}{105}=\overset{2}{5}+\overset{3}{10}$$

$$11)\quad \overset{3}{10}+\overset{3}{8}+\overset{3}{2}+\overset{3}{3}+\overset{3}{9}\,..+\overset{3}{3}+\overset{3}{5}+\overset{3}{4}\,..+\overset{3}{8}=\overset{3}{119}=\overset{3}{9}+\overset{4}{11}$$

$$12)\quad \overset{4}{11}+\overset{4}{9}+\overset{4}{7}+\overset{4}{9}+\overset{4}{6}\,..+\overset{4}{4}+\overset{4}{7}+\overset{4}{9}\,..+\overset{4}{4}=\overset{4}{109}=\overset{4}{9}+\overset{5}{10}$$

$$13)\quad \overset{5}{10}\quad+\overset{5}{6}+\overset{5}{7}+\overset{5}{3}\quad+\overset{5}{7}+\overset{5}{6}+\overset{5}{3}\quad=\overset{5}{42}=\overset{5}{2}+\overset{6}{4}$$

$$14)\quad \overset{6}{4}\qquad+\overset{6}{4}\qquad=\overset{6}{8}$$

$$15)\qquad \overset{7}{2}\qquad=\overset{7}{2}$$

wo die Gleichungen 9) 10) ... 15) aus den Gleichungen 2) 3) ... 8) nach (9) folgen. Addirt man nun beyderseits alles zusammen, und läßt zugleich beyderseits die Summe $\overset{1}{8}+\overset{2}{9}+\overset{3}{10}+\overset{4}{11}+\overset{5}{10}+\overset{6}{4}$ weg, so erhält man

$$98973+672417+793925+369618...+24743836$$
$$+675643+394721...+48497=28299577.$$

2) Zusatz. Um sich das beschwerliche Zählen über zehn zu ersparen, mache man beym Addiren jeder Verticalreihe allemal bey derjenigen Ziffer, bey der man zehn oder darüber zählt, einen Punkt, und zähle blos den Ueberschuß über zehn, welcher allemal eine einziffrige Zahl ist, zu den folgenden Ziffern derselben Reihe. Die einziffrige Zahl, die man auf diese Art zuletzt erhält, schreibe man unter die addirte Verticalreihe, und nehme soviel Einheiten zur folgenden, als Punkte bey der vorigen befindlich waren. Ist es aber die letzte Verticalreihe, so setze man die Zahl, durch welche die Menge der Punkte bey ihr ausgedrückt wird, darneben zur Linken.

3) Beyspiel.

```
   8  6  3  9. 7. 5
   3. 9. 7. 8. 3  2
   4  7. 3  6  2  5.
      4  9. 6. 3  7.
      2  5. 8. 6. 9
      3. 1  3  5. 7.
      5  0  9. 8  9.
      9. 1  0  7. 4
--------------------
1  9  8  4  3  5  8
```

Hier wird also gerechnet:

Für die Verticalreihe am weitesten zur Rechten sagt man: 4 und 9 ist 13 (.); 3 und 7 ist 10 (.); 9 und 7 ist 16 (.); 6 und 5 ist 11 (.); 1 und 2 ist 3, und 5 ist 8. Diese 8 wird unter den Horizontalstrich gesetzt, und weil 4 Punkte bey der addirten Verticalreihe vorkommen, so sage man für die zunächst zur Linken befindliche Verticalreihe: 4 und 7 ist 11 (.); 1 und 8 ist 9, und 5 ist 14 (.); 4 und 6 ist 10 (.); 3 und 2 ist 5, und 3 ist 8, und 7 ist 15 (.); also wird 5 unter den Horizontalstrich geschrieben, und weil hier 4 Punkte vorkommen, so sage man für die folgende Verticalreihe: 4 und 9 ist 13 (.); 3 und 3 ist 6, und 8 ist 14 (.); 4 und 6 ist 10 (.); 6 und 8 ist 14 (.); 4 und 9 ist 13 (.); also wird 3 unter den Horizontalstrich gesetzt, und weil hier 5 Punkte vorkommen, so sagt man für die folgende Verticalreihe: 5 und 1 ist 6, und 1 ist 7, und 5 ist 12 (.); u. s. w.

3) Zusatz. Die Probe, ob man richtig gerechnet hat, ist die, daß man, wenn man zuerst von unten herauf die Verticalreihen addirt hatte, nachher von oben herunter addirt, und sieht, ob man die nämliche Summe erhält.

Drit-

Drittes Kapitel.

Von der Subtraction unbenannter Zahlen.

1. Grundsatz.

Wenn man zwo gegebene unbenannte Zahlen auf einerley Einheit bezieht, so wird der Unterschied (Einl. 14.) derselben, oder die Größe, die zu der einen hinzukommen muß, um die andere hervorzubringen, auch durch eine Zahl, die sich auf dieselbe Einheit bezieht, ausgedrückt werden können. Diese Zahl, die den Unterschied ausdrückt, ist allemal eben dieselbe, man mag für die Einheit annehmen, was man will, oder sie ist von der Art der Einheit ganz unabhängig. Z. B. von der Zahl 9 auf eine gewisse Einheit bezogen, die Zahl 4 auf eben die Einheit bezogen subtrahirt, giebt allemal die Zahl 5 auf ebendieselbe Einheit bezogen.

2. Erklärung. Diese unbenannte Zahl, die den Unterschied ausdrückt, heißt der Unterschied der beyden gegebenen unbenannten Zahlen 9 und 4, wenn man nämlich die Zahl 9 als Minuend, und 4 als Subtrahend (Einl. 14.) betrachtet, und diese Zahl 5 finden, heißt die gegebenen unbenannten Zahlen subtrahiren.

3. Erklärung. Der Unterschied zwoer Größen wird so angedeutet, daß man zur Linken des Zeichens — den Minuend, und zur Rechten den Subtrahend schreibt. Ist also A der Minuend, und B der Subtrahend, so wird der Rest so angedeutet: A — B.

Zusatz. Hieraus ist klar, daß die Wahrheit: Wenn von der unbenannten Zahl 9 die unbenannte Zahl 4 abgezogen wird, so bleibt die unbenannte Zahl 5 übrig, also

$$9 - 4 = 5$$

angedeutet werden kann.

4. Aufgabe. Eine einziffrige Zahl von einer höhern einziffrigen, oder von einer zweyziffrigen Zahl, deren Ziffer zur Linken eine Eins und zur Rechten eine niedrigere einziffrige Zahl als die vorige ist, abzuziehen.

Auflösung.

Man suche im Eins und Eins (II. Kap. 5.) den einziffrigen Subtrahend in der obern Horizontalreihe; den Minuend unter den Zahlen, die mit ihm in einer Verticalreihe stehen. Dasjenige Glied der Verticalreihe zur Linken, welches mit dem gefundenen Minuend in einer Horizontalreihe steht, ist der gesuchte Unterschied.

Beyspiele. $9-4=5$; $14-6=8$; $17-8=9$.

1) Zusatz. Wenn die Zahl 10 von einer zweyziffrigen Zahl, deren Ziffer zur Linken eine Eins ist, abzuziehen ist, so ist der Rest diejenige einziffrige Zahl, die mit der niedrigsten Ziffer des Minuends geschrieben wird. Z. B. $17-10=7$.

2) Zusatz. Wenn 0 von einer Zahl abgezogen wird, so ist der Rest dieselbe Zahl. Z. B. $7-0=7$.

3) Zusatz. Wenn eine Zahl von sich selbst abgezogen wird, so ist der Rest allemal 0. Z. B. $7-7=0$.

5. Aufgabe. Von einer vielziffrigen Zahl eine vielziffrige Zahl abzuziehen.

Auflösung.

1) Man schreibe den Subtrahend unter den Minuend dergestalt, daß die Ziffern am weitesten zur Rechten gerade unter einander stehen, und mache unter den Subtrahend ei. Horizontalstrich.

2) Man subtrahire, von der Rechten nach der Linken zu gehend, nach (4, oder 1) oder 2) oder 3) Zus.) jede Ziffer des Subtrahends von der darüber stehenden des Minuends, und

und setze den Rest, welcher allemal einziffrig ist, gerade darunter unter den Horizontalstrich. Gienge dies aber nicht an, oder wäre einmal eine Ziffer des Subtrahends höher, als die gerade über ihr stehende des Minuends, so vermehre man letztere um 10, oder setze ihr in Gedanken zur Linken eine Eins vor, und subtrahire dann davon die Ziffer des Subtrahends, mache aber zugleich bey der nächsthöhern Ziffer des Subtrahends einen Punkt, welcher andeutet, daß sie bey der folgenden Subtraction um eins größer zu nehmen ist.

1) Beyspiel. Man sucht 7396753 — 4839571. Nach der Vorschrift 1) hat man

```
7396753
4839571
```

und nach der Vorschrift 2)

```
7 3 9 6 7 5 3
4.8 3.9 5.7 1
-------------
2 5 5 7 1 8 2
```

indem
$$\left.\begin{array}{r} 3 - 1 = 2 \\ 15 - 7 = 8 \\ 7 - 6 = 1 \\ 16 - 9 = 7 \\ 9 - 4 = 5 \\ 13 - 8 = 5 \\ 7 - 5 = 2 \end{array}\right\} \text{nach (4.)}$$

also ist 2557182 der verlangte Unterschied.

Beweis.

Aus den angeführten Gleichungen erhellet, daß

$$\begin{array}{r} 1 + 2 = 3 \\ 7 + 8 = 15 \\ 1 + 5 + 1 = 7 \\ 9 + 7 = 16 \\ 1 + 3 + 5 = 9 \\ 8 + 5 = 13 \\ 1 + 4 + 2 = 7 \end{array}$$

mit-

mithin ist nach (II. Kap. 10.)

$$4839571 + 2557182 = 7396753$$

und $$7396753 - 4839571 = 2557182$$

1) Zusatz. Kommt bey einer 9 im Subtrahend ein Punkt zu stehen, so wird sie zur 10, dann zieht man sie nach (4. 1) Zus.) ab.

2) Zusatz. Kommt bey einer Null im Subtrahend kein Punkt zu stehen, so gilt der 2) Zus. in (4.)

3) Zusatz. Bestände der Minuend aus mehr Ziffern als der Subtrahend, so kann man sich an letztern soviel Nullen zur Linken angehängt gedenken, (I. Kap. 4. 2) Zus.) bis der Subtrahend eben soviel Ziffern als der Minuend hat.

2) Beyspiel. Man sucht 537603199 — 869708.

Nach der Vorschrift 1) hat man

537603199
000869708

und nach der Vorschrift 2)

537603199
000.8.6.9.708

536733491

indem

9	—	8	=	1	nach (4.)
9	—	0	=	9	nach (4. 2) Zus.)
11	—	7	=	4	nach (4.)
13	—	10	=	3	nach (4. 1) Zus.)
10	—	7	=	3	nach (4.)
16	—	9	=	7	nach (4.)
7	—	1	=	6	nach (4.)
3	—	0	=	3	nach (4. 2) Zus.
5	—	0	=	5	nach (4. 2) Zus.

Allge-

Allgemeine Sätze von Summen und Differenzen.

6. Lehrsatz. I. Wenn man zu dem Reste den Subtrahend hinzu addirt, so kommt der Minuend heraus; II. Wenn man von der Summe zwoer Größen die eine abzieht, so kommt die andere heraus.

Beweis.

Beydes folgt aus der (Einl. 14.) gegebenen Definition der Subtraction.

1) Zusatz. Bezeichnet man den Minuend durch M und den Subtrahend durch S, so wird der Rest durch M—S angedeutet, und die in I vorgetragene Wahrheit kann kurz durch eine Gleichung so ausgedrückt werden:

$$\text{I} \quad (M-S) + S = M$$

wo, um Zweydeutigkeit zu vermeiden, die Differenz M—S in Klammern eingeschlossen worden ist. Diese Gleichung bleibt allemal richtig, was man auch statt M und S setzen mag, nur müssen sie beyde gleichartige Größen seyn. Setzt man z. B. durchgängig 7 statt M und 3 statt S, so erhält man die Gleichung

$$(7-3) + 3 = 7$$

deren Richtigkeit in die Augen fällt.

2) Zusatz. Bezeichnet man zwo gleichartige Größen durch R und S, so wird ihre Summe durch R + S angedeutet, und die in II vorgetragene Wahrheit kann kurz so ausgedrückt werden:

$$\text{II} \quad (R+S) - R = S$$

wo, um Zweydeutigkeit zu vermeiden, die Summe R + S, so wie im vorigen Zusatze die Differenz M—S, in Klammern eingeschlossen worden ist. Auch diese Gleichung verbleibt wahr, was auch statt R und S gesetzt werden mag, nur müssen sie beyde gleichartige Größen seyn. Setzt man z. B. durchgängig 4 statt R und 3 statt S, so erhält man die Gleichung

$$(4+3) - 4 = 3$$

deren Richtigkeit in die Augen fällt.

3) Zu-

3) Zusatz. Wenn M eine mit S gleichartige Größe bedeutet, so ist auch M—S mit S gleichartig. Da nun in der Gleichung II statt R und S jede zwo gleichartige Größen gesetzt werden können, so kann man auch statt R durchgängig M — S setzen, dann muß aber auch statt R + S nun (M—S) + S gesetzt werden, und dieses ist nach der Gleichung I einerley mit M, und so muß dann statt R + S nun M gesetzt werden, und wir erhalten die Gleichung

$$\text{III} \quad M - (M - S) = S$$

welche die Wahrheit enthält: Wenn von dem Minuend der Rest abgezogen wird, so bleibt der Subtrahend übrig. Dieses giebt ein Beyspiel, wie man aus zwo durch Gleichungen ausgedrückten Wahrheiten, wie hier I und II, eine neue Wahrheit in Form einer Gleichung findet, die man nachher wieder wörtlich ausdrücken kann.

4) Zusatz. Durch Hülfe der Sätze I und III kann man die Probe machen, ob man richtig subtrahirt hat. Man addire nämlich entweder den gefundenen Rest zum Subtrahend, oder subtrahire den gefundenen Rest vom Minuend. Ist die Rechnung richtig, so muß im ersten Falle der Minuend, im zweyten der Subtrahend herauskommen.

7. Grundsatz. Es kommt einerley heraus, ob man zu einer Größe eine andere gleichartige addirt, und zu der dadurch entstehenden Summe noch eine dritte gleichartige hinzufügt, oder ob man zu der ersten die Summe der zweyten und dritten hinzu addirt.

1) Zusatz. Bezeichnet man die erste dieser Größen durch C, die zweyte durch D, und die dritte durch E, so kann dieser aufgestellte Grundsatz durch eine Gleichung so ausgedrückt werden:

$$\text{I}, \quad (C + D) + E = C + (D + E)$$

wo die Klammern in eben der Absicht, wie vorhin, gebraucht werden. Diese Gleichung bleibt richtig, was man auch

statt

statt C, D und E setzen mag, wenn es nur gleichartige Größen sind.

2) Zusatz. Bedeutet F eine mit C und D gleichartige Größe, so ist auch F—D mit C und D gleichartig, und man kann in der Gleichung I des vorigen Zusatzes statt E durchgängig F—D setzen, dann muß aber auch statt D+E nun D+(F—D) gesetzt werden, und dieses ist nach (6. I) soviel als F, und man erhält dann die Gleichung

$$\text{II. } (C+D)+(F-D) = C+F$$

welche die Wahrheit enthält: Eine aus zween Theilen C und F bestehende Summe ändert sich nicht, wenn man den einen Theil C um eine gewisse willkührliche Größe D vermehrt, und den andern F um eben diese Größe vermindert.

3) Zusatz. Aus dieser Gleichung II folgt nach (6. II)

$$\text{III. } (C+F)-(C+D) = F-D$$
$$\text{IIII. } (C+F)-(F-D) = C+D$$

Die Gleichung III enthält die Wahrheit: Eine Differenz ändert sich nicht, wenn man sowohl den Minuend F, als auch den Subtrahend D, um einerley willkührliche Größe C vermehrt.

Die Gleichung IIII aber folgende: Eine aus zween Theilen C und D bestehende Summe ist gleich einer Differenz, deren Minuend herauskommt, wenn man zu dem einen Theile C eine willkührliche Größe F hinzuaddirt, und deren Subtrahend gefunden wird, wenn man von eben dieser willkührlichen Größe F den andern Theil D abzieht.

4) Zusatz. Man kann in der Gleichung IIII, wenn A und E Größen bedeuten, die mit F, also auch unter sich gleichartig sind, statt C durchgängig A—F, und statt D durchgängig F—E setzen, dann muß aber auch statt C+F nun (A—F)+F, welches nach (6. I) mit A, und statt

F—D

F — D nun F — (F — E), welches nach (6. III) mit E einerley ist, gesetzt werden, und man erhält nun die Gleichung

$$\text{V. } A - E = (A - F) + (F - E)$$

welche wörtlich so ausgedrückt werden kann: Eine Differenz ist gleich der Summe zweener Theile, wovon der eine gefunden wird, wenn man vom Minuend A eine willkührliche Größe F abzieht, und der andere herauskommt, wenn man von eben dieser willkührlichen Größe F den Subtrahend E abzieht.

5) Zusatz. Aus dieser Gleichung folgt nach (6. II)

$$\text{VI. } (A - E) - (F - E) = A - F$$

$$\text{VII. } (A - E) - (A - F) = F - E$$

Die Gleichung VI könnte wörtlich so ausgedrückt werden: Eine Differenz ändert sich nicht, wenn man sowohl den Minuend A als auch den Subtrahend F um einerley willkührliche Größe vermindert.

Die Gleichung VII aber so: Eine Differenz läßt sich in eine andere verwandeln, deren Minuend herauskommt, wenn man den Subtrahend E der ersten Differenz von einer willkührlichen Größe A abzieht, und deren Subtrahend gefunden wird, wenn man den Minuend der ersten Differenz F von eben dieser willkührlichen Größe A abzieht.

Die Gleichung VI erhielte man auch, nur in andern Buchstaben ausgedrückt, wenn man in der Gleichung III unter der Voraussetzung, daß A und B mit C und also auch unter sich gleichartige Größen bedeuten, statt F durchgängig A — C, und statt D durchgängig B — C gesetzt hätte.

6. Zusatz. Man kann in der Gleichung IIII, wenn E eine mit C und F gleichartige Größe bedeutet, statt D durchgängig F — E setzen, dann muß aber auch statt F — D

nun

nun F—(F—E), welches nach (6. III) mit E einerley ist, gesetzt werden, und man erhält die Gleichung

VIII. $(C+F)-E = C+(F-E)$

welche wörtlich so ausgedrückt werden könnte: Wenn man bey einer Differenz den Minuend F um eine gewisse Größe C vermehrt, den Subtrahend E aber ungeändert läßt, so wird der Rest um eben diese Größe C vermehrt.

7. Zusatz. Man kann aber auch in der Gleichung IIII, wenn A eine mit D und F gleichartige Größe bedeutet, statt C durchgängig A—F setzen, dann muß aber auch statt C + F nun (A—F)+F, welches nach (6. I) mit A einerley ist, gesetzt werden, und man erhält die Gleichung

VIIII. $A-(F-D)=(A-F)+D$

welche die Wahrheit enthält: Wenn man bey einer Differenz den Minuend A ungeändert läßt, den Subtrahend F aber um eine gewisse Größe D vermindert, so wird der Rest um eben diese Größe D vermehrt.

8) Zusatz. Man kann in der Gleichung VI, wenn D eine mit A und E gleichartige Größe bedeutet, statt F durchgängig D+E setzen, dann muß aber auch statt F—E nun (D+E)—E, welches nach (6. II) mit D einerley ist, gesetzt werden, und man erhält die Gleichung

X. $(A-E)-D = A-(D+E)$

welche die Wahrheit enthält: Wenn man bey einer Differenz den Subtrahend E um eine gewisse Größe D vermehrt, den Minuend A aber ungeändert läßt, so wird der Rest um eben diese Größe D vermindert.

9) Zusatz. Man kann aber auch in der Gleichung VI, wenn B eine mit E und F gleichartige Größe bedeutet, statt A durchgängig B+E setzen, dann muß aber auch statt A—E nun (B+E)—E, welches nach (6. II) mit B einerley ist, gesetzt werden, und man erhält die Gleichung

XI. $B-(F-E) = (B+E)-F$

welche

welche die Wahrheit enthält: Es ist einerley, ob man von einer Größe B eine Differenz abzieht, oder ob man zu eben dieser Größe den Subtrahend E addirt, und von der Summe den Minuend F abzieht.

10) Zusatz. Wenn B, D und F gleichartige Größen bedeuten, so kann man in der Gleichung VIII statt der darin vorkommenden Buchstaben C, E, F nun B, D, F setzen, und man erhält die Gleichung

$$(B+F)-D = B+(F-D)$$

Verwechselt man hier die Buchstaben B und F, so hat man die Gleichung

$$(F+B)-D = F+(B-D)$$

Da nun $B+F=F+B$, so hat man die Gleichung

$$\text{XII. } F+(B-D)=B+(F-D)$$

Eben die Gleichung erhielte man, wenn man in der Gleichung II statt C durchgängig $B-D$ gesetzt hätte. Wörtlich könnte man die in ihr enthaltene Wahrheit so ausdrücken: Es ist einerley, ob man eine Größe D von einer andern B abzieht, und zu dem Reste eine dritte F hinzufügt, oder ob man die erste Größe D von der dritten F abzieht, und zu dem Reste B die zweyte hinzufügt.

11) Zusatz. Wenn A, B und F gleichartige Größen bedeuten, so kann man in der Gleichung XI statt der darin vorkommenden Buchstaben B, E, F nun B, F, A setzen, und man erhält die Gleichung

$$B-(A-F)=(B+F)-A$$

Verwechselt man hier die Buchstaben B und F, so findet sich

$$F-(A-B)=(F+B)-A$$

und man hat, da $B+F=F+B$, nun die Gleichung

$$\text{XIII. } F-(A-B)=B-(A-F)$$

Eben

Eben die Gleichung erhielte man, wenn man in der Gleichung VII statt E durchgängig A—B gesetzt hätte. Wörtlich könnte man sie so ausdrücken: Es ist einerley, ob man von einer Größe A eine andere B abzieht, und den Rest von einer dritten F subtrahirt, oder ob man von der ersten Größe A die dritte F abzieht, und den Rest von der zweyten B subtrahirt.

12) Zusatz. Wenn A, C und E gleichartige Größen bedeuten, so kann man in der Gleichung X statt der darin vorkommenden Buchstaben A, D, E nun A, C, E setzen, und bekommt

$$(A-E)-C=A-(C+E)$$

Verwechselt man hier die Buchstaben C und E, so hat man

$$(A-C)-E=A-(E+C)$$

Da nun $C+E=E+C$, so ergiebt sich die Gleichung

$$\text{XIIII. } (A-E)-C=(A-C)-E.$$

Eben diese Gleichung erhielte man auch, wenn man in der Gleichung VII statt F durchgängig A—C gesetzt hätte. Sie enthält die Wahrheit: Wenn man bey einer Differenz den Minuend A um eine gewisse Größe E vermindert, den Subtrahend C aber ungeändert läßt, so wird der Rest um eben diese Größe E vermindert. Man könnte sie auch so ausdrücken: Es ist einerley, ob man von einer Größe A eine andere E abzieht, und den Rest um eine dritte C vermindert, oder ob man von der ersten Größe A zuerst die dritte C abzieht, und den Rest um die zweyte E vermindert.

8. Lehrsatz. I. Die Summe zwoer oder mehrerer gegebener Differenzen wird gefunden, wenn man von der Summe aller gegebenen Minuenden die Summe aller gegebenen Subtrahenden abzieht. II. Die Differenz zwoer gegebenen Differenzen wird gefunden, wenn man den Minuend

des

des Minuenden zu dem Subtrahend des Subtrahenden, desgleichen aber auch den Subtrahend des Minuenden zu dem Minuend des Subtrahenden hinzuaddirt, und von der erstern Summe die letztere abzieht.

Beweis.

Es seyen A, B, C, D gleichartige Größen, so kann man in der Gleichung (7. 4) Zus. V) statt des Buchstaben A durchgängig $A+C$, statt F durchgängig $B+C$, und statt E durchgängig $B+D$ setzen, dann muß aber auch statt $A-F$ nun $(A+C)-(B+C)$, welches nach der Gleichung (7. 3) Zus. III) mit $A-B$, und statt $F-E$ nun $(B+C)-(B+D)$, welches nach eben der Gleichung mit $C-D$ einerley ist, gesetzt werden, und man hat

$$\text{I. } (A+C)-(B+D)=(A-B)+(C-D)$$

oder die Richtigkeit von I für zwo Differenzen $A-B$ und $C-D$ bewiesen. Hieraus erhellet nun auch die Richtigkeit des Satzes für mehrere Differenzen.

Man kann aber auch, wenn A, B, C, D gleichartige Größen sind, in der Gleichung (7. 5) Zus. VI.) statt A durchgängig $A+D$, statt E durchgängig $B+D$, und statt F durchgängig $B+C$ setzen, dann muß aber auch statt $A-E$ nun $(A+D)-(B+D)$, welches nach der Gleichung (7. 3) Zus. III) mit $A-B$, und statt $F-E$ nun $(B+C)-(B+D)$, welches nach eben der Gleichung mit $C-D$ einerley ist, gesetzt werden, und man hat

$$\text{II. } (A-B)-(C-D)=(A+D)-(B+C)$$

welches der Lehrsatz II. war.

1) Zusatz. Die so eben aufgestellte Gleichung II. ließe sich auch aus der Gleichung (7. 5) Zus. VII) ableiten. Denn man setze in gedachter Gleichung statt A durchgängig $A+C$, statt E durchgängig $B+C$, und statt F durchgängig

gig A + D, so muß statt A − E nun (A + C) − (B + C), welches nach der Gleichung (7. 3) Zus. III) mit A − B, und statt A − F nun (A + C) − (A + D), welches nach eben der Gleichung mit C − D einerley ist, gesetzt werden, und man erhält die nämliche Gleichung.

2) Zusatz. Die beyden aufgestellten Wahrheiten durch ein Beyspiel zu erläutern, hat man

$$(14 - 11) + (17 - 8) + (31 - 24) = (14 + 17 + 31) - (11 + 8 + 24)$$

oder

$$3 + 9 + 7 = 62 - 43$$

welches offenbar richtig ist. Eben so hat man für die Wahrheit

$$(31 - 24) - (14 - 11) = (31 + 11) - (24 + 14)$$

oder

$$7 - 3 = 42 - 38$$

welches ebenfalls offenbar richtig ist.

Viertes Kapitel.

Von der Multiplication unbenannter Zahlen.

1. Grundsatz.

Wenn man eine gegebene unbenannte Zahl auf eine gewisse Einheit bezieht, und die dadurch entstehende Größe als Multiplicand mit einer andern gegebenen unbenannten Zahl als Multiplicator multiplicirt, (Einl. 15.) so wird das Product auch durch eine Zahl, die sich auf dieselbe Einheit bezieht, ausgedrückt werden können. Diese Zahl, von der das Product ausgedrückt wird, ist allemal ebendieselbe, man mag für die Einheit annehmen, was man will, oder sie ist von der Art der Einheit ganz unabhängig. Z. B. die Zahl 9 auf eine gewisse Einheit bezogen, und die dadurch entstehende Größe als Multiplicand mit der Zahl 4 als Multiplicator multiplicirt, giebt ein Product, das durch die Zahl 36 auf eben diese Einheit bezogen ausgedrückt wird.

2. **Erklärung.** Diese unbenannte Zahl, von welcher das Product ausgedrückt wird, heißt das Product der gegebenen unbenannten Zahlen, also ist 36 das Product der beyden unbenannten Zahlen 9 als Multiplicand, und 4 als Multiplicator betrachtet, und diese Zahl 36 finden, heißt die gegebenen unbenannten Zahlen mit einander multipliciren.

3. **Erklärung.** Das Product, das entsteht, wenn eine gewisse Größe als Multiplicand mit einer gewissen unbenannten Zahl als Multiplicator multiplicirt wird, wird so angedeutet, daß man zur Linken eines Punktes oder schiefen Kreuzes ($\times$) den Multiplicator und zur Rechten desselben den Multiplicand schreibt. Ist also M der Multiplicand, und die unbenannte Zahl m der Multiplicator, so wird das Product entweder also: $m.M$, oder also: $m \times M$, angedeutet.

Zu-

Zusatz. Hieraus ist klar, daß die Wahrheit: Die unbenannte Zahl 9 als Multiplicand, mit der unbenannten Zahl 4 als Multiplicator multiplicirt giebt zum Producte die unbenannte Zahl 36, also: $4 . 9 = 36$, oder auch also: $4 \times 9 = 36$, angedeutet werden kann.

4. Lehrsatz. Wenn der Multiplicator und Multiplicand beydes unbenannte ganze Zahlen sind, so kann man, ohne das Product zu ändern, den Multiplicator und Multiplicand mit einander verwechseln; z. B. $3 . 4 = 4 . 3$

Beweis.

Wenn man die Einheiten durch Sternchen bezeichnet, so erhellet die Wahrheit des Satzes für das angeführte Beyspiel aus diesem Schema:

* * * *
* * * *
* * * *

worin die Menge aller Sternchen offenbar sowohl $3 . 4$ oder $4 + 4 + 4$, als auch $4 . 3$ oder $3 + 3 + 3 + 3$ ist. Demnach ist $3 . 4 = 4 . 3$, und was hier beyspielsweise für die Zahlen 3 und 4 erwiesen worden, läßt sich eben so für jedes Paar anderer ganzer Zahlen erweisen.

Zusatz. Man nennt derowegen sowohl den Multiplicator als auch den Multiplicand Factoren, und ein Product ist vollkommen gegeben, wenn beyde Factoren gegeben sind, ohne daß besonders zu bestimmen wäre, welches der Multiplicand, und welches der Multiplicator seyn soll.

5. Lehrsatz. Wenn ein Factor eines Products die Summe mehrerer Theile ist, so ist das Product gleich der Summe aller Producte, die entstehen, wenn jeder Theil des einen Factors mit dem andern multiplicirt wird.

Beweis.

Daß der Satz wahr ist, wenn der Multiplicator die

Summe mehrerer Theile ist, oder daß, wenn A eine Größe jeder Art ist,

$$(3+5).A = 3.A + 5.A$$

seyn müsse, läßt sich aus diesem Schema

A, A, A
A, A, A, A, A

darthun, wo die Summe aller Größen in der ersten Horizontalreihe 3.A und in der zweyten 5.A ist. Die Summe aller Größen im ganzen Schema ist demnach 3.A + 5.A. Es enthält aber auch das ganze Schema die Größe A sovielmal, als die Summe 3 + 5 anzeigt; demnach ist auch die Summe aller Größen im Schema (3 + 5). A, folglich die Richtigkeit der Gleichung dargethan. Was nun beyspielsweise für die beyden Zahlen 3 und 5 dargethan worden ist, läßt sich eben so für jede zwo andre ganze Zahlen erweisen. Bedeuten demnach n und m zwo ganze Zahlen, so ist

$$(n + m).A = n.A + m.A$$

Was hier für zwey Theile erwiesen worden ist, läßt sich eben so für jede größere Menge von Theilen erweisen.

Daß aber auch der Satz wahr seyn müsse, wenn der Multiplicand die Summe mehrerer Theile ist, oder daß, wenn A und B gleichartige Größen jeder Art sind,

$$3.(A + B) = 3.A + 3.B$$

seyn müsse, läßt sich aus diesem Schema

A, A, A
B, B, B

darthun, worin die Summe aller Theile, wenn man horizontal herüber zählt, 3.A + 3.B, und wenn man vertical herab zählt, 3.(A + B) ist. Was hier beyspielsweise für die Zahl 3 erwiesen worden, läßt sich eben so für jede andere ganze Zahl m darthun, und es ist demnach

$$m.(A+B) = m.A + m.B$$

und was hier für zween Theile erwiesen worden ist, läßt sich eben so für jede größere Menge von Theilen erweisen.

1) Zusatz. Wenn ein Factor eines Productes die Differenz zwoer Größen ist, so ist das Product gleich der Differenz der Producte, die entstehen, wenn sowohl der Minuend als auch der Subtrahend mit dem andern Factor multiplicirt wird. Daß diese Behauptung wahr sey, wenn der Multiplicator eine Differenz ist, läßt sich so darthun: In der vorhin bewiesenen Gleichung

$$(n + m).A = n.A + m.A$$

kann man, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, statt n durchgängig k — m setzen, dann muß aber auch statt n + m nun (k — m) + m, welches nach (III. Kap. 6. I) mit k einerley ist, gesetzt werden, und man erhält

$$k.A = (k - m).A + m.A$$

und hieraus folgt nach (III. Kap. 6. II)

$$k.A - m.A = (k - m.)A$$

welches zu beweisen war.

Daß ferner die Behauptung wahr ist, wenn der Multiplicand eine Differenz ist, läßt sich auf eine ähnliche Art darthun. Denn in der vorhin bewiesenen Gleichung

$$m.(A + B) = m.A + m.B$$

kann man, wenn C eine mit B gleichartige Größe bedeutet, statt A durchgängig C — B setzen, dann muß aber auch statt A + B nun (C — B) + B, welches nach (III. Kap. 6. I) mit C einerley ist, gesetzt werden, und man erhält

$$m.C = m.[C - B] + m.B$$

und hieraus folgt nach (III. Kap. 6. II)

$$m.C - m.B = m.[C - B]$$

welches zu beweisen war.

Die Richtigkeit dieser Gleichung läßt sich aber auch für jedes bestimmte m, z. B. für m = 3, so darthun: Nach (III. Kap. 8. I) ist

$$(C-B)+(C-B)+(C-B)=(C+C+C)-(B+B+B)$$

oder, welches einerley ist,

$$3.(C-B) = 3.C - 3.B$$

2) Zusatz. Es ist daher auch

$$(m+m+m).A = m.A + m.A + m.A$$

oder, welches einerley ist,

$$(3.m).A = 3.(m.A)$$

und was hier für die Zahl 3 erwiesen ist, läßt sich eben so für jede andere Zahl n erweisen; es ist daher

$$(n.m).A = n.(m.A)$$

oder wörtlich: Wenn man eine Größe jeder Art A mit einer unbenannten ganzen Zahl m multiplicirt, und das herauskommende Product abermals mit einer andern unbenannten ganzen Zahl n multiplicirt, so ist das eben so viel, als wenn man die Größe A mit dem Producte der beyden unbenannten ganzen Zahlen m und n multiplicirt hätte.

3) Zusatz. Eben so ist auch

$$m.(A+A+A) = m.A + m.A + m.A$$

oder, welches einerley ist,

$$m.(3.A) = 3.(m.A)$$

und was hier für die Zahl 3 erwiesen ist, läßt sich eben so für jede andere ganze Zahl n erweisen; es ist daher

$$m.(n.A) = n.(m.A)$$

Auf diese Gleichung könnte man auch so kommen: Man verwechsele in der Gleichung des vorigen Zusatzes

$$(n.m).A = n.(m.A)$$

die Buchstaben n und m mit einander, so hat man

$$(m.n).A = m.(n.A)$$

da aber nach (4.) $m.n = n.m$ so ist auch

$$m.(n.A) = n.(m.A)$$

Diese

Diese Gleichung könnte wörtlich so ausgedrückt werden: Es kommt einerley Product heraus, wenn man eine Größe jeder Art A erst mit einer unbenannten ganzen Zahl m multiplicirt, und das herauskommende Product mit einer andern unbenannten ganzen Zahl n multiplicirt, oder wenn man die Größe A erst mit der andern unbenannten ganzen Zahl n multiplicirt, und das so entstehende Product mit der erstern unbenannten ganzen Zahl m multiplicirt.

4) Zusatz. Wenn C und B gleichartige Größen jeder Art bedeuten, so kann man in der Gleichung des 1) Zusatzes

$$(k - m).A = k.A - m.A$$

statt A durchgängig C—B setzen, und man erhält

$$(k - m).(C - B) = k.(C - B) - m.(C - B)$$

Setzt man nun in der Gleichung des 1) Zusatzes

$$m.[C - B] = m.C - m.B$$

statt m nun k, so hat man

$$k.[C - B] = k.C - k.B$$

also auch

$$(k - m).(C - B) = (k.C - k.B) - (m.C - m.B)$$

Es ist aber nach (III. Kap. 8. II)

$$(k.C - k.B) - (m.C - m.B)$$
$$= (k.C + m.B) - (k.B + m.C)$$

also ist auch

$$(k - m).(C - B) = (k.C + m.B) - (k.B + m.C)$$

und diese Gleichung könnte wörtlich so ausgedrückt werden: Das Product aus einer Differenz in eine Differenz ist gleich einer Differenz, deren Minuend die Summe der beyden Producte ist, die herauskommen, wenn die beyden Minuenden und die beyden Subtrahenden mit einander multiplicirt werden, und deren Subtrahend die

Sum-

Summe der beyden Producte ist, die entstehen, wenn der Minuend jedes Factors mit dem Subtrahend des andern multiplicirt wird.

6. Aufgabe. Das Einmaleins oder eine Tafel zu verfertigen, worin man gleich sehen kann, was das Product jeder zwo einziffrigen Zahlen sey.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Auflösung.

1) Man schreibe die Reihe der einziffrigen Zahlen von 1 bis 9 oben in eine Horizontalreihe, und seitwärts zur Linken in eine Verticalreihe, dergestalt, daß die Eins der Horizontalreihe zugleich die Eins der Verticalreihe sey.

2) Man addire (II. Kap. 6. oder 7.) zu jeder Zahl in der obern Horizontalreihe sie selbst, zu dem, was herauskommt, wieder dieselbe Zahl in der obern Horizontalreihe, und so fahre man fort, bis man in die unterste Horizontalreihe kommt.

7. Aufgabe. Das Product zwoer einziffrigen Zahlen zu finden.

Auf-

Auflösung.

1) Man suche in dem Einmaleins die eine der gegebenen Zahlen in der obern Horizontalreihe, und die andere in der Verticalreihe zur Linken.

2) Man suche dasjenige Fach auf, welches mit der Zahl in der obern Horizontalreihe in einer Verticalreihe, und mit der Zahl in der Verticalreihe zur Linken in einer Horizontalreihe ist. Dieses Fach enthält das gesuchte Product.

Beyspiele. $2.3 = 6$; $5.7 = 35$; $8.9 = 72$.

Zusatz. Ist ein Factor 1, so ist das Product gleich dem andern Factor, z. B. $7.1 = 1.7 = 7$; ist aber ein Factor 0, so ist das Product auch allemal 0, z. B. $7.0 = 0.7 = 0$.

Anmerkung. Um beym Multipliciren geschwind fortzukommen, muß man das Einmaleins auswendig wissen, oder das Product jeder zwo einziffrigen Zahlen sogleich aus dem Kopfe bestimmen können.

8. Aufgabe. Das Product aus einer vielziffrigen Zahl und aus einer einziffrigen zu finden.

Auflösung.

Man multiplicire, von der Rechten nach der Linken zu gehend, nach (7.) jede Ziffer der vielziffrigen Zahl mit der einziffrigen. Jedes dieser Producte, wenn es eine einziffrige Zahl ist, schreibe man von der Rechten nach der Linken zu hin; ist es aber eine zweyziffrige Zahl, so setze man blos die niedrigste Ziffer davon hin, und die höhere addire man gleich nach (II. Kap. 6. oder 7.) zum folgenden Producte. Das letzte Product aber aus der am weitesten zur Linken in dem mehrziffrigen Factor befindlichen Ziffer und dem einziffrigen Factor wird ganz hingeschrieben.

Beyspiel. $7.5682129 = 39774903$.

Dies wird so gefunden:

7 mal

7	mal	9	ist					63
7	mal	2	ist	14,	und	6	ist	20
7	mal	1	ist	7,	und	2	ist	9
7	mal	2	ist					14
7	mal	8	ist	56,	und	1	ist	57
7	mal	6	ist	42,	und	5	ist	47
7	mal	5	ist	35,	und	4	ist	39

Beweis.

Die Zahl 5682129 mit 7 multipliciren ist nichts anders als die Zahl 5682129 siebenmal zu sich selbst addiren. Wollte man, um dieses zu bewerkstelligen, sich des im (II. Kap. 10.) angegebenen Verfahrens bedienen, so kommt man auf die hier gegebenen Vorschriften. Denn es ist nicht nöthig, die vielziffrige Zahl wirklich 7mal über einander zu schreiben, und es ist vollkommen einerley, ob man die Zahl, welche durch die Ziffern in den höhern Stellen bey der Summe einer Verticalreihe gebildet wird, gleich anfangs, oder zuletzt zu der folgenden Verticalreihe zur Linken addirt.

9. Lehrsatz. Wenn das Product zwoer unbenannter Zahlen bekannt ist, und man hängt an einen Factor zur Rechten einige Nullen an, so muß man an das Product eben soviel Nullen zur Rechten anhängen. Z. B. weil nach (7.)

$$5 \cdot 7 = 35 \text{ so ist auch}$$

$$5 \cdot 70000 = 350000 \text{ oder}$$

$$5 \cdot \overset{4}{7} = \overset{4}{35}$$

Beweis.

Da $5 \cdot 7$ oder $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$ so ist auch (II. Kap. 9.)

$$70000 + 70000 + 70000 + 70000 + 70000 = 350000$$

oder $5 \cdot 70000 = 350000$.

Da

Da 5682129 . 7 = 7 . 5682129 = 39774903
nach (8.)
so ist aus eben dem Grunde

7000 . 5682129 = 5682129 . 7000 = 39774903000

oder

$$\overset{3}{7} . 5682129 = 3977490\overset{3}{3}$$

10. Aufgabe. Das Product zwoer vielziffrigen Zahlen zu finden.

Auflösung.

1) Man schreibe die beyden vielziffrigen Zahlen so unter einander, daß die letzten Ziffern zur Rechten gerade unter einander zu stehen kommen, und ziehe darunter einen Horizontalstrich.

2) Man multiplicire nach (8.) den obenstehenden vielziffrigen Factor mit jeder Ziffer des untern Factors, und schreibe diese Producte so unter den Strich, daß die niedrigste Ziffer jedes Productes gerade in einer Verticalreihe mit derjenigen Ziffer des untern Factors zu stehen kommt, die mit dem obern multiplicirt dieses Product gegeben hatte; hierauf addire man alles, was unter dem Horizontalstrich steht, in dieser Stellung nach (II. Kap. 10.) zusammen.

Beyspiel. Man sucht 753947 . 7648.

Nach der Vorschrift 1) hat man

```
753947
  7648
------
```

und nach der Vorschrift 2)

```
   753947
     7648
---------
  6031576
 3015788
4523682
5277629
---------
5766186656
```

indem man nach (8.) findet

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & 8 \cdot 753947 & = & 6031576 \\
2) & 4 \cdot 753947 & = & 3015788 \\
3) & 6 \cdot 753947 & = & 4523682 \\
4) & 7 \cdot 753947 & = & 5277629
\end{array}
$$

also ist 5766186656 das verlangte Product.

Beweis.

Es ist

$$
\begin{array}{rcrl}
8 \cdot 753947 & = & 6031576 & \text{nach 1)} \\
\overset{1}{4} \cdot 753947 & = & 301578\overset{1}{8} & \text{nach 2)} \\
\overset{2}{6} \cdot 753947 & = & 45236\overset{2}{8}2 & \text{nach 3)} \\
\overset{3}{7} \cdot 753947 & = & 52776\overset{3}{2}9 & \text{nach 4)}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{wegen (9)}
$$

Die zur Rechten der Gleichheitszeichen stehende Zahlen sind ordentlich unter einander gesetzt, so daß nämlich Ziffern von einerley Ordnung gerade unter einander stehen. Derowegen ist nach (5.)

$$7648 \cdot 753947 = (8 + \overset{1}{4} + \overset{2}{6} + \overset{3}{7}) \cdot 753947$$

$$= 8 \cdot 753947 + \overset{1}{4} \cdot 753947 + \overset{2}{6} \cdot 753947 + \overset{3}{7} \cdot 753947$$

= 5766186656, welches zu beweisen war.

1) Zusatz. Kommt bey dem untenstehenden Factor eine Ziffer mehreremal vor, so braucht man nur das erstemal den obern Factor damit zu multipliciren, und für die andern male kann man das Product gleich abschreiben.

2) Zusatz. Eine Zahl ändert sich nicht, wenn man sie mit 1 multiplicirt; kommt also eine Eins im untern Factor vor, so braucht man, um das Product für diese Ziffer zu haben, den obern Factor blos abzuschreiben.

3) Zusatz. Kommen Nullen in der Mitte des untern Factors vor, so werden diese übergangen.

Bey-

Beyspiel. 9487396 . 400107 = 3795973551372
nach folgender Rechnung

```
     9487396
      400107
    66411772
   9487396      nach 2) Zus.
37949584
3795973551372
```

4) Zusatz. Endigt sich ein Factor mit einer oder mehreren hinter einander geschriebenen Nullen, so kann man nach (9.) diese bey der Rechnung weglassen, und an das Product zur Rechten soviel Nullen anhängen. Endigt sich auch der andere Factor mit einer oder mehreren hinter einander geschriebenen Nullen, so multiplicire man blos beyde Factoren ohne die Nullen mit einander, und hänge an das Product soviel Nullen zur Rechten, als an beyden Factoren zusammen befindlich sind. Z. B. Weil nach dem ersten Beyspiele

$$7648 . 753947 = 5766186656$$

so ist auch

$$7648 . 7539470000 = 57661866560000$$

und

$$7648000 . 7539470000 = 57661866560000000$$

11. Erklärung. Ein Product aus mehrern Factoren, z. B. 7, 17, 8, 11, 14, wird so angedeutet: 14 . 11 . 8 . 17 . 7. und seine Bedeutung ist, man soll den ersten Factor 7 mit dem zweyten 17 multipliciren, das herauskommende Product soll mit dem dritten Factor 8, was nun herauskommt, mit 11, und was nun herauskommt, mit 14 multiplicirt werden. Es ist also 14 . 11 . 8 . 17 . 7 = 146608 nach folgender Rechnung:

```
       7
     ————(17
     119
     ————(8
     952
      11
     ————
     952
    952
    —————
   10472
      14
  ———————
   41888
  10472
  ———————
  146608
```

Zusatz. Aus der nämlichen Rechnung erhellet, daß 146608 auch = 14. 11. 952 und 952 = 8. 17. 7, folglich ist 14. 11. 8. 17. 7 = 14. 11. (8. 17. 7), oder allgemein: Ein Product aus mehrern Factoren ändert sich nicht, wenn man statt zween oder mehrerer am weitesten zur Rechten unmittelbar neben einander stehender Factoren ihr Product setzt.

12. Lehrsatz. Ein Product aus mehrern Factoren ändert sich nicht, wenn man statt zweyer zunächst neben einander stehender Factoren ihr Product setzt.

Beweis.

Erster Fall. Daß der Satz wahr sey, wenn die beyden Factoren am weitesten zur Rechten stehen, ist schon im vorigen Zusatze bewiesen worden.

Zweyter Fall. Daß der Satz wahr sey, wenn die beyden Factoren am weitesten zur Linken stehen, oder daß z. B. i. h. g. f. e. d. c. b. a = (i. h.) g. f. e. d. c. b. a, erhellet also:

Es sey g. f. e. d. c. b. a = p, so ist nach (11. Zus.)

i. h. g. f. e. d. c. b. a = i. h. p = i. (h. p)

und

und

$$(i.h).g.f.e.d.c.b.a = (i.h).p.$$

Nun ist nach (5. 2) Zus.)

$$i.(h.p) = (i.h.)p,$$

folglich die Gleichung bewiesen.

Dritter Fall. Daß der Satz wahr sey, wenn die beyden Factoren in der Mitte stehen, oder daß z. B.

$$i.h.g.f.e.d.c.b.a = i.h.g.(f.e).d.c.b.a,$$

wird so bewiesen: Nach dem zweyten Falle ist

$$f.e.d.c.b.a = (f.e).d.c.b.a,$$

und nach (11. Zus.)

$$i.h.g.f.e.d.c.b.a = i.h.g.[f.e.d.c.b.a]$$
$$i.h.g.(f.e).d.c.b.a = i.h.g.[(f.e.)d.c.b.a]$$

folglich die Gleichung bewiesen.

1) Zusatz. Da nach (11. Zus.) $f.(e.d) = f.e.d$; $g.(f.e.d) = g.f.e.d$; $h.(g.f.e.d) = h.g.f.e.d$ u. s. w. so ist $l.k.i.h.g.f.e.d.c.b.a = l.k.i.h.g.f.(e.d).c.b.a$ $= l.k.i.h.g.(f.e.d.)c.b.a = l.k.i.h.(g.f.e.d.)c.b.a$ $= l.k.i.(h.g.f.e.d).c.b.a$, u. s. w. das heißt: Ein Product aus mehrern Factoren ändert sich nicht, wenn man statt mehrerer unmittelbar neben einander stehender Factoren ihr Product setzt.

2) Zusatz. Vermöge 1) Zus. und (11. Zus.) ist also auch $n.m.l.k.i.h.g.f.e.d.c.b.a = n.m.l.k.i.h.g.f.(e.d.c).b.a = n.m.l.k.(i.h).g.f.(e.d.c).b.a = n.(m.l).k.(i.h).g.f.(e.d.c).b.a$, das heißt: Wenn bey einem Producte aus mehrern Factoren einige Factoren selbst Producte aus mehrern Factoren sind, so ist selbiges gleich dem Producte aus allen vorkommenden Factoren der Factoren, und allen andern, die nicht zusammengesetzt sind, wenn man ihre Ordnung nicht ändert. Eben

das

das gilt, wenn alle Factoren Producte aus mehrern Factoren sind, so ist z. B.

$$l.k.i.h.g.f.e.d.c.b.a = (l.k.i.h).(g.f.e).(d.c.b.a)$$

13. Lehrsatz. Ein Product aus mehrern Factoren ändert sich nicht, wenn man einen Factor von seiner Stelle wegnimmt, und an eine andere setzt.

Beweis.

Erster Fall. Daß der Satz wahr sey, wenn man blos zwey zunächst neben einander stehende Factoren versetzt, oder daß z. B. $i.h.g.f.e.d.c.b.a = i.h.g.f.d.e.c.b.a$, erhellet also:

Nach (12.) ist

$$i.h.g.f.e.d.c.b.a = i.h.g.f.(e.d).c.b.a$$
$$i.h.g.f.d.e.c.b.a = i.h.g.f.(d.e).c.b.a$$

folglich, da $e.d = d.e$, die Gleichung bewiesen.

Zweyter Fall. Daß der Satz wahr sey, wenn die beyden Stellen des Factors weiter aus einander sind, oder daß z. B.

$$i.h.g.f.e.d.c.b.a = i.h.d.g.f.e.c.b.a$$

läßt sich sowohl durch wiederholte Anwendung des ersten Falles, als auch so erweisen:

Vermöge (12. 1) Zus.) ist

$$i.h.g.f.e.d.c.b.a = i.h.(g.f.e).d.c.b.a$$
$$i.h.d.g.f.e.c.b.a = i.h.d.(g.f.e).c.b.a$$

und nach dem ersten Falle

$$i.h.(g.f.e).d.c.b.a = i.h.d.(g.f.e).c.b.a$$

folglich die Gleichung bewiesen.

14. Lehrsatz. Wenn zwey Producte aus mehrern Factoren so beschaffen sind, daß das eine aus dem andern entsteht, wenn die Factoren desselben nach einer beliebigen Ordnung versetzt werden, so sind sie gleich.

Beweis.

Die Wahrheit dieses Satzes erhellet jedesmal aus wiederholter Anwendung von (13.). Daß z. B.

f. d. b. i. g. e. a. h. c = i. h. g. f. e. d. c. b. a

erhellet daraus, daß bey folgenden Producten aus mehrern Factoren

f. d. b. i. g. e. a. h. c
i. f. d. b. g. e. a. h. c
i. h. f. d. b. g. e. a. c
i. h. g. f. d. b. e. a. c
i. h. g. f. e. d. b. a. c
i. h. g. f. e. d. c. b. a

jede zwo zunächst über einander stehende nach (13.) einander gleich sind.

1) Zusatz. Ein Product aus mehrern Factoren ist also bestimmt, wenn die Factoren gegeben sind, und es ist gleichgültig, in welcher Ordnung man sie nehmen will.

2) Zusatz. Wenn bey der Summe von Producten aus mehrern Factoren einer oder mehrere gemeinschaftliche Factoren in allen Producten vorkommen, so kann man dieselben herauswerfen. Es erhellet nämlich aus (5.), daß z. B.

6. 16. 31. 9. 17. 23. 29 + 6. 16. 31. 3. 8 + 6. 16. 31. 5. 7. 11.
= 6. 16. 31. (9. 17. 23. 29 + 3. 8 + 5. 7. 11)

3) Zusatz. Wenn bey der Differenz zweyer Producte aus mehrern Factoren einer oder mehrere gemeinschaftliche Factoren in beyden Producten vorkommen, so kann man dieselben herauswerfen. Es erhellet nämlich aus (5. 1) Zus.) daß z. B.

7. 17. 41. 21. 6. 4 — 7. 17. 41. 3. 9. 2. 5
= 7. 17. 41. [21. 6. 4 — 3. 9. 2. 5]

15.

15. Bemerkung. Es giebt einige Vortheile, durch die man oft kürzer als auf die gewöhnliche Art das verlangte Product erhält. Man begreift diese unter dem Namen der praktischen Multiplication. Die gewöhnlichsten und wichtigsten sind folgende:

A) Wenn ein Factor sich in zween oder mehrere Factoren zerlegen läßt.

1) Beyspiel. Man sucht 42.3897637. Weil 42 = 7.6, so multiplicire man den andern Factor 3897637 erst mit 6, und was herauskommt, mit 7.

$$\begin{array}{rl} 3897637 & (6 \\ \hline 23385822 & (7 \\ \hline 163700754 & = 42.3897637. \end{array}$$

2) Beyspiel. Man sucht 288.364879. Weil 288 = 8.6.6, so multiplicire man den andern Factor 364879 erst mit 6, das herauskommende Product abermals mit 6, und das nun herauskommende Product mit 8.

$$\begin{array}{rl} 364879 & (6 \\ \hline 2189274 & (6 \\ \hline 13135644 & (8 \\ \hline 105085152 & = 288.364879 \end{array}$$

Denn weil 288 = 8.6.6, so ist

$$288.364879 = (8.6.6).364879 = 8.6.6.364879$$

nach (12. 1) Zus.) Ohnerachtet der Vortheil nicht sehr erheblich ist, so ist es doch nützlich, ihn zu kennen, weil es Fälle geben kann, wo er beträchtlich wird. Sein Gebrauch setzt Fertigkeit in Zerlegung einer Zahl in ihre Factoren voraus.

B) Wenn ein Factor mit lauter Neunen geschrieben wird. Man hängt dann an den andern Factor zur Linken soviel Nullen an, als der erste Neunen hatte, subtrahirt von der

der Rechten nach der Linken zu gehend jede Ziffer des andern Factors von derjenigen, die um soviel Stellen weiter zur Rechten steht, als der erste Neunen hatte, und schreibe den Rest unter die abziehende Ziffer. Diejenigen Ziffern, die so weit zur Rechten stehen, daß es keine Ziffern giebt, die um soviel Stellen zur Rechten stünden, als der erste Factor Neunen hat, werden von o abgezogen. Ist die abziehende Ziffer größer als diejenige, von der sie abgezogen werden soll, so vermehre man letztere um 10, und ziehe dann ab, mache aber zugleich bey der Ziffer, welche der abziehenden zunächst zur Linken steht, einen Punkt. Die Ziffern, bey denen ein Punkt steht, gelten eins mehr als sonst, wenn es Subtrahenden sind; sind es aber Minuenden, so behalten sie ihre erste Bedeutung.

1) Beyspiel. Man sucht 9. 75481692.

o.7.5 4 8 1 6.9.2
6 7 9 3 3 5 2 2 8 = 9. 75481692

Hier ist die Rechnung diese:

2 von o geht nicht, also 2 von 10 bleibt 8 (.)
10 von 2 geht nicht, also 10 von 12 „ 2 (.)
7 von 9 „ 2
1 von 6 „ 5
8 von 1 geht nicht, also 8 von 11 „ 3 (.)
5 von 8 „ 3
5 von 4 geht nicht, also 5 von 14 „ 9 (.)
8 von 5 geht nicht, also 8 von 15 „ 7 (.)
1 von 7 „ 6

2) Beyspiel. Man sucht 99. 38984516.

o o 3.8.9.8 4 5.1.6
3 8 5 9 4 6 7 o 8 4 = 99. 38984516.

Hier ist die Rechnung diese:

6 von 0	geht nicht, also	6 von 10	bleibt	4 (.)
2 von 0	geht nicht, also	2 von 10	=	8 (.)
6 von 6			=	0
4 von 1	geht nicht, also	4 von 11	=	7 (.)
9 von 5	geht nicht, also	9 von 15	=	6 (.)
10 von 4	geht nicht, also	10 von 14	=	4 (.)
9 von 8	geht nicht, also	9 von 18	=	9 (.)
4 von 9			=	5
0 von 8			=	8
0 von 3			=	3

3) Beyspiel. Man sucht 999.8509463.

000 8.5 0.9.4.6.3

8 5 0 0 9 5 3 5 3 7 = 999.8509463.

Der Beweis beruhet darauf, daß alle Zahlen, die mit lauter Neunen geschrieben werden, eine Einheit einer höhern Ordnung weniger Eins sind; darauf, daß man, um eine Zahl mit einer Einheit einer höhern Ordnung zu multipliciren, nach (9.) blos soviel Nullen, als die höhere Ordnung anzeigt, zur Rechten anzuhängen braucht, und auf (5. 1) Zus.). Z. B. die Ursache des Verfahrens beym Beyspiel 2) erhellet aus folgender Betrachtung:

3898451600 = 100.38984516 nach (9.)

38984516 = 1.38984516, also abgezogen

3859467084 = 100.38984516 — 1.38984516
= (100 — 1). 38984516 = 99.38984516 nach [5. 1) Zus.]

C) Wenn ein Factor mit lauter Einsen geschrieben wird. Man hängt dann an den andern Factor zur Linken soviel Nullen weniger eine an, als der erste Einsen hat, addirt, von der Rechten nach der Linken zu gehend, zu jeder

Ziffer

Ziffer des andern Factors soviel zunächst zur Rechten daneben stehende weniger eine, als der erste Factor Einsen hat, und schreibt die Summe, wenn es eine einziffrige Zahl ist, unter die gedachte Ziffer des andern Factors; ist es aber eine mehrziffrige, so schreibt man blos die niedrigste Ziffer davon hin, und die Zahl, welche durch die Ziffern in den höhern Stellen gebildet wird, addire man gleich anfangs zu der folgenden Summe. Die letzte der gedachten Summen wird aber ganz hingeschrieben. Zu einer Ziffer, die soweit zur Rechten steht, daß es nicht mehr soviel zunächst zur Rechten stehende Ziffern giebt, als die um 1 verminderte Menge der Einsen des ersten Factors beträgt, wird auch nur soviel addirt, als noch zur Rechten steht.

1) Beyspiel. Man sucht 11.39548319.

$$\begin{array}{l} 039548316 \\ \hline 435031509 = 11.39548319. \end{array}$$

Hier ist die Rechnung diese:

$$\begin{array}{rcl}
9 & = & 9 \\
1 + 9 & = & 10 \\
1 + 3 + 1 & = & 5 \\
8 + 3 & = & 11 \\
1 + 4 + 8 & = & 13 \\
1 + 5 + 4 & = & 10 \\
1 + 9 + 5 & = & 15 \\
1 + 3 + 9 & = & 13 \\
1 + 0 + 3 & = & 4
\end{array}$$

2) Beyspiel. Man sucht 111.53781627.

$$\begin{array}{l} 0053781627 \\ \hline 5969760597 = 111.53781627. \end{array}$$

Hier ist die Rechnung diese:

$$
\begin{array}{l}
7 = 7 \\
2 + 7 = 9 \\
6 + 2 + 7 = 15 \\
1 + 1 + 6 + 2 = 10 \\
1 + 8 + 1 + 6 = 16 \\
1 + 7 + 8 + 1 = 17 \\
1 + 3 + 7 + 8 = 19 \\
1 + 5 + 3 + 7 = 16 \\
1 + 0 + 5 + 3 = 9 \\
0 + 0 + 5 = 5
\end{array}
$$

3) Beyspiel. Man sucht 1111.753192785.

$$
\begin{array}{l}
000753192785 \\
\hline
836797184135 = 1111.753192785.
\end{array}
$$

Denkt man sich bey dem Beyspiele 2) die Multiplication auf die gewöhnliche Art verrichtet:

$$
\begin{array}{r}
53781627 \\
111 \\
\hline
53781627 \\
53781627 \\
53781627 \\
\hline
5969760597
\end{array}
$$

so fällt in die Augen, daß von den drey unter dem obersten Horizontalstrich stehenden Zahlen, deren Summe das Product giebt, diejenigen Ziffern, die gerade über einander stehen, in dem andern oder obern Factor allemal zunächst neben einander stehen, auf welchen Umstand der Beweis der obern Regel gegründet ist.

D) Wenn alle Ziffern eines Factors, die niedrigste ausgenommen, Einsen sind. Man hängt dann an den andern Factor zur Linken soviel Nullen an, als der erste Ein-
sen

sen enthält, multiplicirt von der Rechten nach der Linken zu gehend jede Ziffer des andern Factors mit der niedrigsten Ziffer des ersten Factors, addirt zu dem Producte soviel zunächst zur Rechten stehende Ziffern, als der erste Factor Einsen enthält, (wobey zu bemerken ist, daß, wenn nicht soviel Ziffern zur Rechten noch vorhanden sind, so wird soviel addirt, als noch zur Rechten dasteht) und schreibt jede solche Summe, wenn es eine einziffrige Zahl ist, unter die multiplicirte Ziffer des andern Factors. Ist es aber eine mehrziffrige Zahl, so wird blos die niedrigste Ziffer davon hingeschrieben, und die Zahl, welche durch die Ziffern in den höhern Stellen gebildet wird, gleich anfangs zur folgenden Summe mitgerechnet. Die letzte der gedachten Summen wird ganz hingeschrieben.

1) Beyspiel. Man sucht 17.3785319.

03785319
64350423 = 17.3785319.

Hier ist die Rechnung diese:

7.9 = 63
7.1 + 6 + 9 = 22
7.3 + 2 + 1 = 24
7.5 + 2 + 3 = 40
7.8 + 4 + 5 = 65
7.7 + 6 + 8 = 63
7.3 + 6 + 7 = 34
7.0 + 3 + 3 = 6

2) Beyspiel. Man sucht 114.83892765.

0083892765
9563775210 = 114.83892765.

Hier ist die Rechnung diese:

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 5 = 20 \\ 4 \cdot 6 + 2 + 5 = 31 \\ 4 \cdot 7 + 3 + 6 + 5 = 42 \\ 4 \cdot 2 + 4 + 7 + 6 = 25 \\ 4 \cdot 9 + 2 + 2 + 7 = 47 \\ 4 \cdot 8 + 4 + 9 + 2 = 47 \\ 4 \cdot 3 + 4 + 8 + 9 = 33 \\ 4 \cdot 8 + 3 + 3 + 8 = 46 \\ 4 \cdot 0 + 4 + 8 + 3 = 15 \\ 4 \cdot 0 + 1 + 0 + 8 = 9 \end{array}$$

3) Beyspiel. Man sucht 1116.37427816.

$$\begin{array}{l} 00037427816 \\ \hline 41769442656 = 1116 \cdot 37427816. \end{array}$$

E) Wenn alle Ziffern eines Factors, die höchste ausgenommen, Einsen sind. Man hängt dann an den andern Factor zur Rechten soviel Nullen an, als der erste Einsen enthält, multiplicirt, von der Rechten nach der Linken zu gehend, jede Ziffer des andern Factors mit der höchsten Ziffer des ersten Factors, addirt zu dem Producte soviel zunächst zur Linken stehende Ziffern, als der erste Factor Einsen enthält, (wobey zu bemerken ist, daß, wenn nicht soviel Ziffern zur Linken noch vorhanden sind, so wird soviel addirt, als noch zur Linken dasteht), und schreibt jede solche Summe, wenn es eine einziffrige Zahl ist, unter die multiplicirte Ziffer des andern Factors. Ist es aber eine mehrziffrige Zahl, so wird blos die niedrigste Ziffer davon hingeschrieben, und die Zahl, welche durch die Ziffern in den höhern Stellen gebildet wird, gleich anfangs zu der folgenden Summe mitgerechnet. Die letzte der gedachten Summen wird ganz hingeschrieben.

1) Bey-

1) Beyspiel. Man sucht 71.4898375.

$$\frac{48983750}{347784625} = 71.4898375.$$

Hier ist die Rechnung diese:

$$\begin{array}{llllll}
7.0 & & + 5 & = & 5 \\
7.5 & & + 7 & = & 42 \\
7.7 & + 4 & + 3 & = & 56 \\
7.3 & + 5 & + 8 & = & 34 \\
7.8 & + 3 & + 9 & = & 68 \\
7.9 & + 6 & + 8 & = & 77 \\
7.8 & + 7 & + 4 & = & 67 \\
7.4 & + 6 & & = & 34
\end{array}$$

2) Beyspiel. Man sucht 611.3519725834.

$$\frac{351972583400}{2150552484574} = 611.351972583400.$$

Hier ist die Rechnung diese:

$$\begin{array}{llllll}
6.0 & & + 0 & + 4 & = & 4 \\
6.0 & & + 4 & + 3 & = & 7 \\
6.4 & & + 3 & + 8 & = & 35 \\
6.3 & + 3 & + 8 & + 5 & = & 34 \\
6.8 & + 3 & + 5 & + 2 & = & 58 \\
6.5 & + 5 & + 2 & + 7 & = & 44 \\
6.2 & + 4 & + 7 & + 9 & = & 32 \\
6.7 & + 3 & + 9 & + 1 & = & 55 \\
6.9 & + 5 & + 1 & + 5 & = & 65 \\
6.1 & + 6 & + 5 & + 3 & = & 20 \\
6.5 & + 2 & + 3 & & = & 35 \\
6.3 & + 3 & & & = & 21
\end{array}$$

3) Beyspiel. Man sucht 9111.5921751.

$$\begin{array}{r} 5921751000 \\ \hline 5395307336\,1 \end{array} = 9111 . 5921751.$$

Anmerkung. Es lassen sich noch mehrere Fälle angeben, wo man geschwinder als auf die gewöhnliche Art das verlangte Product findet, z. B. wenn die höchste und niedrigste Ziffer eines Factors Einsen sind; und alle mittlere Nullen. Wer viel rechnet, und die Gründe der Rechnung kennt, erfindet sich leicht diese und andere Vortheile, die sich schwer unter allgemeine Regeln bringen lassen. In ganz bestimmten Fällen lassen sich oft noch besondere Verkürzungen anbringen. Hat man die Division erlernt, so giebt es noch mehr solche Vortheile, die im folgenden Kapitel erklärt werden sollen.

Fünftes Kapitel.

Von der Division unbenannter Zahlen.

1. Grundsatz.

Wenn man eine gegebene unbenannte Zahl auf eine gewisse Einheit bezieht, und die dadurch entstehende Größe als Dividend durch eine andere gegebene unbenannte Zahl dividirt, (Einl. 16.) so wird der Quotient auch durch eine Zahl, die sich auf dieselbe Einheit wie die erste gegebene Zahl bezieht, ausgedrückt werden können. Diese Zahl, die den Quotienten ausdrückt, ist allemal ebendieselbe, man mag für die Einheit annehmen, was man will, oder sie ist von der Art der Einheit ganz unabhängig, Z. B. die Zahl 21 auf eine gewisse Einheit bezogen, als Dividend, durch 3 als Divisor dividirt, giebt einen Quotienten, der durch die Zahl 7 auf eben diese Einheit bezogen ausgedrückt wird.

2. Erklärung. Diese unbenannte Zahl, die den Quotient ausdrückt, heißt der Quotient der gegebenen unbenannten Zahlen; mithin ist 7 der Quotient der beyden unbenannten Zahlen 21 als Dividend und 3 als Divisor betrachtet und diese Zahl 7 finden, heißt die unbenannte Zahl 21 durch die unbenannte Zahl 3 dividiren.

3. Erklärung. Ein Quotient wird so angedeutet, daß man zur Linken des Zeichens : den Dividend, und zur Rechten desselben den Divisor schreibt. Ist also D der Dividend, und die unbenannte Zahl d der Divisor, so wird der Quotient also: D : d angedeutet.

1) Zusatz. Hieraus ist klar, daß die Wahrheit: Die unbenannte Zahl 21 als Dividend, durch die unbenannte Zahl 3 als Divisor dividirt, giebt 7 zum Quotienten, also 21 : 3 = 7 angedeutet wird.

2) Zusatz. Wenn Divisor und Dividend ganze Zahlen sind, so ist es doch oft der Fall, daß der Quotient nicht vollkommen durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, oder daß er zwischen zwo ganze Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind, fällt. Z. B. der Quotient 23 : 3 fällt zwischen die beyden ganzen Zahlen 7 und 8, das heißt, er ist größer als 7 und kleiner als 8, weil 3.7 erst 21, aber 3.8 schon 24 ist. Er ist also um etwas, das noch nicht ganz 1 beträgt, und dessen Größe in der Lehre von den Brüchen bestimmt werden wird, größer als 7. Hier, wo blos von ganzen Zahlen die Rede ist, giebt man gewöhnich die kleinere dieser ganzen Zahlen als Quotient an, und bemerkt dabey den Rest, der herauskommt, wenn von dem gegebenen Dividend das Product aus dem Divisor in den angenommenen Quotienten abgezogen wird. Ist also 23 der Dividend und 3 der Divisor, so ist 7 der angenommene Quotient, und $2 = 23 - 3 . 7$ der Rest.

4. Aufgabe. Zu untersuchen, wievielmal eine einziffrige Zahl A in einer andern Zahl B enthalten sey, welche Zahl B kleiner als das Zehnfache von A ist.

Auflösung.

Erster Fall. Ist $B < A$, so ist die gesuchte Zahl 0.

Zweyter Fall. Ist B nicht kleiner als A, so suche man die einziffrige Zahl A in der obern Horizontalreihe des Einmaleins, und unter den Zahlen, die damit in einer Verticalreihe stehen, diejenige, die entweder B gleich oder zunächst kleiner ist. Die einziffrige Zahl in der linken Verticalreihe, die mit dieser in einer Horizontalreihe steht, ist die verlangte. Auf diese Art findet man, daß, wenn $A = 3$, und $B = 21$, die gesuchte Zahl 7 sey; und wenn $A = 6$ und $B = 51$, so ist die gesuchte Zahl 8.

Anmerkung. Wenn man im Dividiren geschwind fortkommen will, so muß man diese Aufgabe sogleich im Kopfe,

ohne

ohne das Einmaleins wirklich zur Hand zu nehmen, auflösen können. Dazu wird erfordert, daß man das Einmaleins auswendig wisse, welches ohnedies schon zur Multiplication unbenannter Zahlen, wenn man geschwind fortkommen will, nöthig ist, wie schon im vorigen Kapitel 7. Anm. bemerkt worden.

5. Aufgabe. Eine vielziffrige Zahl D als Dividend durch eine einziffrige d zu dividiren.

Auflösung.

1) Man schreibe d zur Linken von D, trenne beyde durch eine Klammer, mache zur Rechten des Dividends einen Verticalstrich, schneide die Ziffer am weitesten zur Linken von D ab, und nehme im Fall, daß diese abgeschnittene Ziffer kleiner als d ist, noch die zunächst zur Rechten stehende Ziffer dazu.

2) Man untersuche nach (4.), wievielmal d in der abgeschnittenen Zahl enthalten ist, setze die herauskommende einziffrige Zahl hinter den Verticalstrich, multiplicire damit d, setze das Product unter die abgeschnittene Zahl, ziehe unter dem Producte einen Horizontalstrich, ziehe es von der abgeschnittenen Zahl ab, und setze den Rest unter den Horizontalstrich. (Im Falle daß der Rest 0 ist, braucht man gar nichts unter den Strich zu setzen.)

3) An den Rest setze man die folgende Ziffer des Dividenden zur Rechten an, (oder im Falle kein Rest stattgefunden hat, setze man diese folgende Ziffer des Dividends allein unter den Strich), untersuche nach (4.), wievielmal in der dadurch entstehenden Zahl, die S heißen mag, d enthalten sey, setze die herauskommende einziffrige Zahl hinter den Verticalstrich zur Rechten der vorher gefundenen schon dahinter stehenden, multiplicire damit d, setze das Product unter S, ziehe unter dem Producte einen Horizontalstrich, ziehe es von S ab, und setze den Rest, wenn einer stattfindet, unter den

Ho-

Horizontalstrich; (findet aber keiner statt, oder ist er 0, so wird nichts unter den Horizontalstrich gesetzt).

4) Man wiederhole die Vorschrift 3) so lange, bis es keine Ziffer des Dividends mehr herunterzusetzen giebt. Die hinter dem Verticalstrich stehende Zahl ist der Quotient, und im Falle daß bey der letzten Subtraction etwas übrig bleibt, dieses der Rest.

1) Beyspiel. Man sucht 94874148 : 4.

Nach der Vorschrift 1) hat man

```
4) 9'4874148|
```

nach der Vorschrift 2)

```
4) 9'4874148|2
   8
   -
   1
```

nach der Vorschrift 3)

```
4) 9'4874148|23
   8
   --
   14
   12
   --
    2
```

und nach der Vorschrift 4)

4)

```
4) 9'4874148|23718537
   8........|
   --
   14
   12......
   --
    28
    28.....
    --
      7
      4....
     --
     34
     32...
     --
      21
      20..
      --
       14
       12.
       --
        28
        28
        --
```

Weil demnach bey der letzten Subtraction nichts übrig bleibt, oder, wie man zu sagen pflegt, die Division aufgeht, so ist 23718537 der vollständige Quotient.

2) Beyspiel. Man sucht 448161892 3:7
Nach der Vorschrift 1) hat man

```
7) 4'4'81618923|
```

nach der Vorschrift 2)

```
7) 4'4'81618923|6
   42           |
   --
    2
```

nach der Vorschrift 3)

```
7) 4'4'81618923|64
   42           |
   --
    28
    28
    --
```

und

und nach der Vorschrift 4)

```
7) 4'4'81618923|640231274
   42.........|
   --
    28
    28........
    --
     1
     0.......
    --
    16
    14.....
    --
    21
    21....
    --
     8
     7...
    --
    19
    14..
    --
    52
    49.
    --
    33
    28
    --
     5
```

Es fällt demnach der wahre Quotient zwischen die hinter dem Verticalstrich stehende und die um 1 höhere ganze Zahl, und wenn man die erstere für den Quotienten annimmt, so ist 5 der Rest.

Beweis.

Aus der für das Beyspiel 2) gemachten Rechnung ergiebt sich nach (IIII. Kap. 9.), daß

$$42 = 7 \cdot \overset{8}{6}$$
$$\overset{7}{28} = 7 \cdot \overset{7}{4}$$
$$\overset{6}{0} = 7 \cdot \overset{6}{0}$$
$$\overset{5}{14} = 7 \cdot \overset{5}{2}$$
$$\overset{4}{21} = 7 \cdot \overset{4}{3}$$
$$\overset{3}{7} = 7 \cdot \overset{3}{1}$$
$$\overset{2}{14} = 7 \cdot \overset{2}{2}$$
$$\overset{1}{49} = 7 \cdot \overset{1}{7}$$
$$28 = 7 \cdot 4$$
$$5 = 5$$

Was zur Linken des Gleichheitszeichens steht, ist, wie aus der für das Beyspiel 2) gemachten Rechnung leicht folgt, zusammenaddirt $= 4481618923 = D$, und was zur Rechten derselben steht, ist vermöge (IIII. Kap. 5.) gleich $7 \cdot [\overset{8}{6} + \overset{7}{4} + \overset{6}{0} + \overset{5}{2} + \overset{4}{3} + \overset{3}{1} + \overset{2}{2} + \overset{1}{7} + 4] + 5$ $= 7 \cdot 640231274 + 5$, also ist

$$4481618923 = 7 \cdot 640231274 + 5$$

1) Zusatz. Ist einmal ein S kleiner als d, wie im zweyten Beyspiele das zweyte S, so kommt im Quotienten eine Null zu stehen. In diesem Falle kann man zur Verkürzung sogleich die folgende Ziffer des Dividends zur Rechten anhängen, und dann sieht die Rechnung für das zweyte Beyspiel so aus:

```
7) 4¹4¹8161892 3 | 640231274
   4² ........ |
    28
    28.......
      16
      14.....
       21
       21....
          8
          7...
          19
          14..
           52
           49.
            33
            28
             5
```

2) Zusatz. Jeder Rest ist kleiner als der Divisor d.

3) Zusatz. Es ist vortheilhaft und leicht, die ganze Rechnung bey einem einziffrigen Divisor, der hier angenommen wird, in Gedanken zu machen. Z. B. Man sucht

476396742 : 7

so findet sich 68056677 als Quotient und 3 als Rest.

6. Aufgabe. Zu untersuchen, wievielmal eine vielziffrige Zahl A in einer andern Zahl B enthalten sey, welche Zahl B kleiner als das Zehnfache von A ist.

Erster Fall. Ist B < A, so ist die gesuchte Zahl 0.

Zweyter Fall. Ist B nicht kleiner als A, so schneide man von der Rechten nach der Linken zu gehend soviel Ziffern von B in Gedanken ab, als die um Eins verminderte Ziffermenge

menge bey A beträgt. Ist die nun zur Linken übrigbleibende ein- oder zweyziffrige Zahl kleiner als das Zehnfache der Ziffer am weitesten zur Linken in A, so suche man nach (4), wievielmal diese Ziffer von A in der zur Linken von B abgeschnittenen Zahl enthalten ist, und dividire nach (5) die Zahl B durch die gefundene einziffrige Zahl. Ist der Quotient nicht kleiner als A, so ist die gefundene einziffrige Zahl die richtige; ist aber der Quotient kleiner als A, so muß man die gefundene einziffrige Zahl um 1 vermindern, und wieder in B hinein dividiren. Ist der Quotient nun nicht kleiner als A, so hat man nunmehr die verlangte Zahl; wäre der Quotient aber wiederum kleiner als A, so müßte man diese Zahl noch einmal um 1 vermindern, und diese Verminderung um 1 so lange fortsetzen, bis man endlich einen Quotienten erhält, der nicht kleiner als A ist. Wäre aber die zur Linken übrigbleibende von B abgeschnittene Zahl nicht kleiner als das Zehnfache von A, so dividire man B durch 9; ist der Quotient nicht kleiner als A, so ist 9 die verlangte Zahl, im Gegenfalle muß man statt der 9 nun 8 versuchen, und übrigens wie vorhin verfahren. Es versteht sich, daß man die hier vorkommenden Divisionen nach der in (5. 3) Zus.) gelehrten Methode anstellt, und nur soweit fortsetzt, bis sich, ob der Quotient kleiner oder nicht kleiner als A ist, entscheidet, und dazu braucht man in den meisten Fällen nur einige wenige der höchsten Ziffern des Quotienten, die man durch die Division am ersten findet.

Beyspiele für den zweyten Fall.

1) Es sey A = 417; B = 879. Weil hier 3 die Ziffernmenge in A ist, so schneide man eine weniger, also zwey Ziffern von B zur Rechten ab 8|79, und da die zur Linken übrigbleibende Zahl 8 kleiner als das Zehnfache der höchsten Ziffer in A oder der 4 ist, so untersuche man nach der Aufgabe (4), wievielmal 4 in 8 enthalten ist; die Auflösung giebt die Zahl 2, man dividire also nach (5, 3) Zus.) B durch

2, und da die Anfangsziffern des Quotienten 43 sind, so zeigt sich schon aus den beyden ersten Ziffern des Quotienten, wenn man ihn mit A vergleicht, daß er größer als A ist, mithin ist 2 die gesuchte Zahl.

2) Es sey A = 417; B = 1729. Hier ist 4 in 17 nach der Aufgabe in (4) 4mal enthalten; dividirt man nun B durch 4, so zeigen schon die beyden ersten Ziffern des Quotienten 43, daß er größer als A ist, also ist 4 die gesuchte Zahl.

3) Es sey A = 267; B = 924. Hier ist 2 in 9 nach der Aufgabe in (4) 4mal enthalten; dividirt man nun B durch 4, so zeigen schon die beyden ersten Ziffern des Quotienten 23, daß er kleiner als A ist, also ist 4 zu groß. Dividirt man aber B durch die eins niedrigere Zahl 3, so zeigt schon die erste Ziffer des Qaotienten 3, daß er größer als A ist, also ist 3 die gesuchte Zahl.

4) Es sey A = 267; B = 1682. Hier ist nach (4) 2 in 16 8mal enthalten; dividirt man B durch 8, so findet sich der Quotient 21.... also ist 8 zu groß; man dividire also B durch 7, und es findet sich der Quotient 24.... also ist auch 7 zu groß; man dividire also B durch 6, und es findet sich der Quotient 28.... also ist 6 die verlangte Zahl.

5) Es sey A = 297; B = 2234. Hier ist 22 größer als das Zehnfache von 2, man dividire also B erst durch 9, und es findet sich der Quotient 24.... also ist 9 zu groß; man dividire also B durch 8, und es findet sich der Quotient 27.... also ist auch 8 zu groß; man dividire also durch 7, und es findet sich der Quotient 3... also ist 7 die verlangte Zahl.

6) Es sey A = 3758369; B = 17508367. Weil 3 in 17 5mal enthalten ist, so findet sich B : 5 = 35... also ist 5 zu groß; B : 4 = 4... also ist 4 die verlangte Zahl.

7) Es sey A = 29367872; B = 165389736. Weil 2 in 16 8mal enthalten ist, so findet sich

B

B : 8 = 20...
B : 7 = 23...
B : 6 = 27...
B : 5 = 3...

also ist 5 die verlangte Zahl.

8) Es sey A = 38476368ſ; B = 230857211o. Weil 3 in 23 7mal enthalten ist, so findet sich

B : 7 = 32...
B : 6 = 384762...
B : 5 = 4...

also ist 5 die verlangte Zahl. Ein solches Beyspiel, wie dieses, wo man die Division einmal bis auf 6 Ziffern fortsetzen muß, kommt aber sehr selten vor. Hätte man bey eben dem A, B = 2308582273 angenommen, so fände sich B : 6 = 3847637... also wäre 6 dann die gesuchte Zahl.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe muß man, wenn man im Dividiren geschwind fortkommen will, fertig auflösen, und zu dem Ende alle bey gegenwärtigen Beyspielen ausführlich auseinander gesetzten Schlüsse und Rechnungen sogleich im Kopfe, ohne sie aufzuschreiben, machen können.

7. Aufgabe. Eine vielziffrige Zahl D durch eine kleinere vielziffrige d zu dividiren.

1) Man schreibe d zur Linken von D, trenne beyde durch eine Klammer, mache zur Rechten des Dividenden D einen Verticalstrich, schneide von der Linken nach der Rechten zu gehend, soviel Ziffern von D ab, als d hat, und nehme, wenn diese zur Linken von D abgeschnittene Zahl kleiner als d ist, noch die zunächst zur Rechten stehende Ziffer dazu.

2) Man befolge die bey der Aufgabe (5) gegebenen Vorschriften 2), 3) und 4) mit dem einzigen Unterschiede, daß, wo dort nach (4) steht, hier nach (6) gesetzt werden muß, und daß statt der in 2) und 3) vorkommenden Worte: setze das

Product, hier stehen muß: setze während des Multiplicirens das Product.

1) Beyspiel. Man sucht 957202558 : 247.

Nach der Vorschrift 1) hat man

```
247)957'202558|
```

und nach der Vorschrift 2)

```
247) 957'202558|3875314
     741 . . . . . .|
     2162
     1976 . . . . .
      1860
      1729 . . . .
       1312
       1235 . . .
        775
        741 . .
         345
         247 .
         988
         988
```

Weil demnach bey der letzten Subtraction nichts übrig bleibt, so ist 3875314 der vollständige Quotient.

2) Beyspiel. Man sucht 5962046731 68 : 8329.

Nach der Vorschrift 1) hat man

```
8329) 5962'0'4673168|
```

und

und nach der Vorschrift 2)

```
8329) 5962|0|4673168|7158|783
      58303 .......|
       13174
        8329 ......
        48456
        41645 .....
         68117
         66632 ....
          14853
           8329 ...
           65241
           58303 ..
            69386
            66632 .
             27548
             24987
              2561
```

Es fällt demnach der wahre Quotient zwischen die hinter dem Verticalstrich stehende und die um 1 höhere ganze Zahl, und wenn man die erstere für den Quotienten annimmt, so ist 2561 der Rest.

Beweis.

Die Richtigkeit des Verfahrens läßt sich beynahe eben so wie bey der Aufgabe (5) darthun. So ergiebt sich aus der für das 2) Beyspiel gemachten Rechnung nach (IIII. Kap. 9.), daß

$$\overset{7}{58303} = \overset{7}{7}.8329$$
$$\overset{6}{8329} = \overset{6}{1}.8329$$
$$\overset{5}{41645} = \overset{5}{5}.8329$$
$$\overset{4}{66632} = \overset{4}{8}.8329$$
$$\overset{3}{8329} = \overset{3}{1}.8329$$
$$\overset{2}{58303} = \overset{2}{7}.8329$$
$$\overset{1}{66632} = \overset{1}{8}.8328$$
$$24987 = 3.8329$$
$$2561 = 2561$$

Was auf der linken Seite der Gleichheitszeichen steht, ist, wie aus der für das 2) Beyspiel gemachten Rechnung leicht folgt, zusammenaddirt $= 596204673168 = D$, und was auf der rechten Seite steht, nach (IIII. Kap. 5.) gleich $[\overset{7}{7} + \overset{6}{1} + \overset{5}{5} + \overset{4}{8} + \overset{3}{1} + \overset{2}{7} + \overset{1}{8} + 3].8329 + 2561$ $= 71581783.8329 + 2561$, also ist

$$596204673168 = 8329.71581783 + 2561$$

1) Zusatz. Die im 1) und 2) Zus. zu der Aufgabe (5) enthaltenen Behauptungen finden auch hier Statt. Gesetzt man sollte 350950809469 durch 4723 dividiren, so gäbe das folgende Rechnung:

4723

```
4723) 3509|5|0809469|74306756
      33061 .......|
      -----
       20340
       18892 ......
       -----
        14488
        14169 .....
        -----
         31909
         28338 ...
         -----
          35714
          33061 ..
          -----
           26536
           23615 .
           -----
            29219
            28338
            -----
              881
```

also ist 74306756 der Quotient und 881 der Rest.

2) Zusatz. Kommt im Quotienten eine Ziffer zwey oder mehrmal vor, wie im 2) Beyspiele der gegenwärtigen Aufgabe die Ziffern 7 und 8, und in dem Beyspiele des vorigen Zusatzes die Ziffern 7 und 6, so braucht man sie nur das erstemal mit d zu multipliciren, und kann für alle folgende male das Product abschreiben.

3) Zusatz. Endigt sich der Divisor mit einer oder mehrern Nullen, so schneide man zur Rechten vom Dividend eben soviel Ziffern ab, und dividire den also verkürzten Dividend durch den Divisor ohne Nullen. Der so herauskommende Quotient ist mit dem gesuchten einerley, und der so gefundene Rest giebt, wenn zur Rechten die vom Dividend abgeschnittenen Ziffern dazu gesetzt werden, den gesuchten Rest. Sollte z. B. 8374694823 durch 329000 dividirt werden, so dividire man blos 8374694 durch 329. Weil nun dann der Quotient 25454 und der Rest 328 gefunden wird, so ist

ist auch der gesuchte Quotient 25454 und der gesuchte Rest 328823.

4) Zusatz. Kommt einmal ein S vor, das zwar kleiner als ein Product aus dem Divisor in eine gewisse einziffrige Zahl, jedoch von diesem Producte um viel weniger unterschieden wäre, als von dem Producte aus dem Divisor in die um 1 kleinere einziffrige Zahl, so setze man die erste einziffrige Zahl hinter den Verticalstrich in den Quotienten, das Product aus derselben in d unter S, subtrahire nun umgekehrt S von diesem Producte, und vermindere diesen Rest um eins. Statt die folgenden Ziffern des Dividends nach und nach herunterzusetzen, setze man ihre Ergänzungen (d. h. was sie von 9 abgezogen übrig lassen) herunter, verfahre aber übrigens wie sonst, außer daß man die von da an herauskommenden Quotienten etwas unterhalb hinter den Verticalstrich schreibt. Dieses Verfahren setzt man so lange fort, bis man wieder einmal ein S erhält, das zwar kleiner als ein Product aus dem Divisor in eine gewisse einziffrige Zahl, jedoch von diesem Producte um viel weniger unterschieden ist, als von dem Producte aus dem Divisor in die um Eins kleinere einziffrige Zahl; man schreibt dann wieder diese einziffrige Zahl hinter den Verticalstrich in den Quotienten, zieht wieder umgekehrt S von diesem Producte ab, vermindert zugleich den Rest um Eins, setzt die folgenden Ziffern des Dividenden wieder ungeändert herunter, und die herauskommenden Quotienten wieder oberhalb. Dieses Verfahren kann man mehrere male wiederholen, nur muß dieses umgekehrte Abziehen allemal eine gerade Anzahl mal stattfinden, das heißt, steht die letzte Ziffer des Quotienten oberhalb, so muß sie so angenommen werden, daß das Product aus ihr in d nicht größer als S ist; steht sie aber unterhalb, so muß sie so angenommen werden, daß das Product aus ihr in d größer als S ist. Der Quotient selbst kommt heraus, wenn man das unterhalb stehende von dem oberhalb stehenden subtrahirt.

1) Beyspiel. Man sucht 18123238260388 8 : 264573.

```
264573) 181232'3'82603888 | 685       37
        1587438 ........  |     0005
        -------             -----------
         2248858            684999537
         2116584 .......
         -------
          1322742
          1322865 ......
          -------
            1223961
            1322865 ..
            -------
              989038
              793719 .
              1953198
              1852011
              -------
              101187
```

also ist 684999537 der Quotient und 1835 der Rest.

2) Beyspiel. Man sucht 2021299567327831 43 : 6874.

```
6874) 2021'2'9956732783143 | 3    05    07
      20622 ..............  | 06   002   0058
      -----                   --------------
       40900                  29404998069942
       41244 ..........
       -----
        34356
        34370 ........
        -----
          13267
          13748 ......
          -----
            48078
            48118 ....
            -----
              39685
              34370 .
              -----
               53156
               54992
               -----
               1835
```

mir.

mithin ist 29404998069942 der Quotient und 1835 der Rest. Es fällt in die Augen, daß durch diesen Vortheil die Division manchmal beträchtlich verkürzt werden kann, vorzüglich wenn so ein Fall wie in [6. 8) Beysp.] vorkommt.

5) Zusatz. Hat man noch keine rechte Fertigkeit in Auflösung der Aufgabe (6), so kann man sich eine Art von Einmaleins für den gegebenen Divisor, das heißt, ein Täfelchen verfertigen, worin der einfache, zweyfache, dreyfache u. s. w. bis neunfache Divisor enthalten ist. Der Divisor nämlich verdoppelt giebt das Zweyfache desselben; zum Zweyfachen das Einfache addirt, bekommt man das Dreyfache davon; das Zweyfache verdoppelt giebt das Vierfache; das Zweyfache und Dreyfache zusammenaddirt giebt das Fünffache u. s. w. Hat man dieses Täfelchen einmal verfertigt, so braucht man, um dividiren zu können, nichts weiter als subtrahiren zu können.

Beyspiel. Man sucht 786394621538 : 53789.

53789	1
107578	2
161367	3
215156	4
268945	5
322734	6
376523	7
430312	8
484101	9

```
78639|4621438 | 1462
53789........ |     0011
------------- ----------
248504          14619989
215156......
------
 333486
 322734.....
 ------
  107522
  107578....
  ------
     55846
     53789.
     -----
      20571
      53789
      -----
     33217
```

also ist 14619989 der Quotient und 33217 der Rest.

Ist

Ist ein Dividend sehr groß, oder sind mehrere Dividenden durch einerley Divisor zu dividiren, so kann der geübteste Rechner ein solches Täfelchen mit Vortheil gebrauchen. Daß man diesen Vortheil, dessen Erfindung dem Ludolph von Ceulen zugeschrieben wird, sehr bequem mit dem im 4) Zus. angegebenen verbinden könne, lehrt die Ausrechnung des gegebenen Beyspiels.

6) Zusatz. Die Probe, ob man richtig gerechnet hat, ist diese, daß man den herausgekommenen Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und wenn ein Rest übrig geblieben war, diesen zum Producte addirt; bekommt man dadurch den Divdend, so ist die Rechnung richtig.

8. Grundsatz. Wenn man zwo unbenannte Zahlen auf einerley Einheit bezieht, so giebt es eine unbenannte Zahl, welche anzeigt, wievielmal die eine der dadurch entstehenden Größen in der andern enthalten ist. Diese unbenannte Zahl ist allemal eben dieselbe, man mag für die Einheit annehmen, was man will, oder sie ist von der Art der Einheit ganz unabhängig. Z. B. die Zahl 3 auf eine gewisse Einheit bezogen, ist in der Zahl 21 auf eben diese Einheit bezogen allemal 7mal enthalten.

1) Zusatz. Man giebt sehr oft auch folgende Definition von der Division: Dividiren heißt untersuchen, wievielmal der Divisor im Dividend enthalten ist. Nach dieser Definition der Division müssen Dividend und Divisor gleichartige Größen, der Quotient aber allemal eine unbenannte Zahl seyn. Da nun die Zahl 3 auf eine gewisse Einheit bezogen, in der Zahl 21 auf ebendiese Einheit bezogen, 7mal enthalten ist, so ist nach dieser Definition der Division die unbenannte Zahl 7 der Quotient der beyden unbenannten Zahlen 21 als Dividend, und 3 als Divisor betrachtet, und diese Zahl 7 finden, heißt dann die unbenannte Zahl 21 durch die unbenannte Zahl 3 dividiren.

2) Zusatz. Legt man die erste Definition (2) zum Grunde, so läßt sich 21 durch 3 ohne Rest dividiren, und der Quotient ist 7. Es ist daher 3 . 7 = 21; aber 3.7 = 7.3 (nach IIII. Kap. 4.) also auch 7 . 3 = 21, mithin ist auch 3 in 21 7mal enthalten, und es zeigt demnach der Quotient 7 sowohl an, daß 7 der dritte Theil von 21, als auch daß 3 in 21 7mal enthalten sey. Sind also Dividend und Divisor ganze Zahlen, und geht die in (5) und (7) gelehrte Divisionsoperation auf, so ist es einerley, man mag von der Division die Definition geben, daß sie den Dividend in soviel gleiche Theile theilen lehre, als der Divisor anzeigt, oder daß sie untersuchen lehre, wievielmal der Divisor im Dividend enthalten ist. Geht aber die Divisionsoperation nicht auf, z. B. ist 23 durch 3 zu dividiren, wo 7 der Quotient und 2 der Rest ist, so weiß man zwar auch, daß sowohl der 3te Theil von 23, als auch die Zahl, welche anzeigt, wievielmal 3 in 23 enthalten ist, zwischen 7 und 8 fällt; ob aber die vollständigen Quotienten gleich sind, und es also auch in diesem Falle einerley ist, welche von den beyden Definitionen man zum Grunde legt, läßt sich hier noch nicht entscheiden. Nur soviel ist gewiß, beyde Zahlen, sowohl die, welche den 3ten Theil von 23 bestimmt, als auch die, welche anzeigt, wievielmal 3 in 23 enthalten ist, fallen zwischen einerley zunächst bey einander liegende ganze Zahlen, welches hier die Zahlen 7 und 8 sind.

Praktische Division.

9. Erklärung. Vortheile, durch die man kürzer als auf die vorhin beschriebene gewöhnliche Art den Quotienten und Rest erhält, begreift man unter dem Namen der praktischen Division. Die gewöhnlichsten davon sind folgende:

A) Wenn der Divisor sich in zween oder mehrere Factoren zerlegen läßt.

1) Bey-

1) Beyspiel. Man sucht 163700754 : 42.
Weil 42 = 7 . 6, so dividire man nach (5. 3) Zus.) den Dividend erst durch 7, und den herauskommenden Quotienten durch 6.

$$\begin{array}{r|l} & 163700754 \\ 7) & 23385822 \\ 6) & 3897637 \end{array}$$

Weil bey beyden Divisionen kein Rest übrig blieb, so ist 3897637 der vollständige Quotient.

2) Beyspiel. Man sucht 105085152 : 288.

Weil 288 = 8 . 6 . 6, so dividire man den Dividend erst durch 8, den herauskommenden Quotienten durch 6, und den nun herauskommenden Quotienten abermals durch 6.

$$\begin{array}{r|l} & 105085152 \\ 8) & 13135644 \\ 6) & 2189274 \\ 6) & 364879 \end{array}$$

Weil bey allen drey Divisionen kein Rest übrig bleibt, so ist 364879 der vollständige Quotient.

Wie man zu verfahren habe, wenn die Divisionen nicht aufgehen, lehrt folgendes

3) Beyspiel. Man sucht 5897384558985 : 24192.
Weil 24192 = 9 . 8 . 8 . 7 . 6, so findet man das Gesuchte so:

	Rest	Divisor	
	3. . . .		5897384558985
7.1+6 = 13	6. . . .	9)	.655264950998
8.13+2 = 106	2. . . .	8)	..81908118874
8.106+6 = 854	6. . . .	8)	..10238514859
9.854+3 = 7689	1. . . .	7)	...1462644979
		6)	243774163

Dem.

Demnach ist 243774163 der Quotient, und 7689 der Rest.

Die bey den einzelnen Divisionen hier übrigbleibenden Reste sind zur Linken in gerader Linie neben den Dividenden angemerkt Aus diesen findet man den gesuchten Ueberrest 7689 auf folgende Weise: Man multiplicire den letzten Rest 1 mit dem vorletzten Divisor 7, und addire zum Producte 7 den vorletzten Rest 6; was herauskommt 13 multiplicire man mit dem vorvorletzten Divisor 8, und addire zu dem Producte 104 den vorvorletzten Rest, und so fahre man fort, wie zur Linken bemerkt ist. Der Grund dieses Verfahrens ist dieser: Weil nach der Rechnung

$$1462644979 = 6.243774163 + 1 \text{ und}$$
$$10238514859 = 7.1462644979 + 6$$

so ist nach (IIII. Kap. 5.)

$$10238514859 = 7.6.243774163 + 7.1 + 6$$
$$= 7.6.243774163 + 13$$

Nun ist ferner nach der Rechnung

$$81908118874 = 8.10238514859 + 2$$

also auch nach (IIII. Kap. 5.)

$$= 8.7.6.243774163 + 8.13 + 2$$
$$= 8.7.6.243774163 + 106$$

Eben so ist ferner

$$655264950998 = 8.8.7.6.243774163 + 8.106 + 6$$
$$= 8.8.7.6.243774163 + 854$$
$$5897384558985 = 9.8.8.7.6.243774163 + 9.854 + 3$$
$$= 98876243774163 + 7689$$

oder auch nach (IIII. Kap. 12. 1) Zus.)

$$= (9.8.8.7.6).243774163 + 7689$$
$$= 24192.243774163 + 7689$$

welches zu beweisen war. Wer diesen Vortheil brauchen will, muß eine gewisse Fertigkeit in Zerlegung einer Zahl in Factoren besitzen.

B) Wenn

B) Wenn der Divisor 5 oder 25 oder 125 oder 625 ist. Man multiplicirt dann den Dividend mit 2, 4, 8 oder 16, schneidet vom Producte zur Rechten 1, 2, 3 oder 4 Ziffern ab, so ist die zur Linken des Absonderungszeichens stehende Zahl der Quotient, und das, was zur Rechten desselben steht, wieder durch 2, 4, 8 oder 16 dividirt giebt den Rest. Sind die zur Rechten des Absonderungszeichens stehende Ziffern lauter Nullen, so bleibt kein Rest übrig, oder, wie man auch zu sagen pflegt, so geht die Division auf.

1) Beyspiel. Man sucht 789273195 : 5.

789273195 (2
157854639|0

also ist 157854639 der vollständige Quotient, oder der Rest 0.

2) Beyspiel. Man sucht 347879164 8 : 5.

3478791648 (2
6957583329|6

also ist 695758329 der Quotient und 6 : 2 oder 3 der Rest.

3) Beyspiel. Man sucht 5098392375 : 25.

5098392375 (4
203935695|00

also ist 203935695 der vollständige Quotient.

4) Beyspiel. Man sucht 970386742596 : 25.

970386742596 (4
38815469703|84

also ist 38815469703 der Quotient und 84 : 4 oder 21 der Rest.

5) Beyspiel. Man sucht 874312604875 : 125.

874312604875 (8
6994500839|000

also ist 6994500839 der vollständige Quotient.

6)

6) Beyspiel. Man sucht 5473921943794:125.

$$\frac{5473921943794}{4379137555 0|352}(8$$

also ist 4379137555 0 der Quotient und 352:4 oder 88 der Rest.

7) Beyspiel. Man sucht 47838795625:625.

$$\frac{47838795625}{76542073|0000}(16$$

also ist 76542073 der vollständige Quotient.

8) Beyspiel. Man sucht 93464573218:625.

$$\frac{93464573218}{149543317|1488}(16$$

also ist 149543317 der Quotient und 1488:16 oder 93 der Rest. Im 7) und 8) Beyspiele multiplicirt man mit 16 nach [IIII. Kap. 15. D)].

Der Beweis gründet sich darauf, daß

$$2.5 = 10$$
$$4.25 = 100$$
$$8.125 = 1000$$
$$16.625 = 10000$$

Um nun zu zeigen, daß jedes der angeführten Beyspiele, z. B. das 4te, nach der gegebenen Vorschrift richtig berechnet worden sey, kann man so verfahren: Nach der Multiplcation findet sich

$4.970386742596 = 3881546970384$

dies ist auch $= 3881546970300 + 84$

oder $= 100.38815469703 + 84$

oder nach (IIII. K. 5. 2) Z.) $= 4.[25.38815469703] + 4.21$

oder nach (IIII. Kap. 5.) $= 4.[25.38815469703 + 21]$

mithin ist auch

$970386742596 = 25.38815469703 + 21$

welches zu beweisen war.

Zu-

Zusatz. Hieraus folgt umgekehrt, um eine Zahl mit 5, 25, 125 oder 625 zu multipliciren, braucht man an sie nur eine, zwo, drey oder vier Nullen zur Rechten anzuhängen, und sie dann durch 2, 4, 8 oder 16 zu dividiren.

1) Beyspiel. Man sucht 5.3793258717.

2) 3793258717|0
18966293585 = verlangte Product.

2) Beyspiel. Man sucht 25.5737648031.

4) 5737648031|00
143441200775 = verl. Prod.

3) Beyspiel. Man sucht 125.4849367.

8) 4849367|000
606170875 = verl. Prod.

4) Beyspiel. Man sucht 625.38430278.

4) 38430278|0000
4) 96075695000
2401892375 0 = verl. Prod.

Dies sind die Vortheile, die man durch Hülfe der Division bey der Multiplication anbringen kann, und wovon in der Anmerkung zu Ende des vorigen Kapitels die Rede war.

Allgemeine Sätze von Producten und Quotienten.

10. Lehrsatz. I. Ein Product durch den Multiplicator dividirt, giebt zum Quotienten den Multiplicand. II. Ein Quotient mit dem Divisor multiplicirt, giebt zum Producte den Dividend; oder, wenn M und D Größen jeder Art, m und d aber ganze Zahlen bedeuten, so ist

I. $(m.M) : m = M$
II. $d.(D : d) = D$

Beweis.

Beydes folgt aus der (Einl. 16.) gegebenen Erklärung der Division.

1) Zusatz. Wenn zwo unbenannte ganze Zahlen m und d miteinander multiplicirt werden, so ists (IIII. Kap. 4) einerley, welche von beyden zum Multiplicator oder Multiplicand gemacht wird, oder es ist $m.d = d.m$; setzt man nun in der Gleichung I, wo M alles seyn kann, d statt M, so erhält man $(m.d): m = d$, also ist auch $(d.m): m = d$, das heißt: Ein Product aus zwoen unbenannten ganzen Zahlen durch eine derselben dividirt, giebt zum Quotienten allemal die andere Zahl

2) Zusatz. Bedeutet f eine unbenannte ganze Zahl, welche sich durch d ohne Rest dividiren läßt, so kann man in der Gleichung $(d.m): m = d$ des vorigen Zusatzes $f: d$ statt m setzen, man erhält dann $(d.[f:d]):(f:d) = d$; aber der Dividend ist, wie aus II erhellet, wenn man f statt D setzt, $= f$, also hat man

$$f:(f:d) = d$$

das heißt: Wenn eine unbenannte ganze Zahl f durch eine andere dergleichen d ohne Rest sich dividiren läßt, und man dividirt den Dividend f durch den Quotient $f:d$, so bekommt man den Divisor d.

3) Zusatz. Ein Product aus mehrern unbenannten ganzen Factoren, durch ein Product einiger derselben dividirt, giebt zum Quotienten das Product aus den übrigen; z. B.

$$(a.b.c.d.e.):(b.d) = a.c.e$$

denn nach (III. Kap. 14 und 12. 2) Zus.) ist

$$a.b.c.d.e = b.d.a.c.e = (b.d).(a.c.e)$$

woraus nun der Satz nach (I oder auch 1) Zus.) folgt.

11. Lehrsatz. Die Summe zwoer oder mehrerer gleichartiger Größen, durch eine unbenannte ganze Zahl dividirt,

vidirt, giebt zum Quotienten die Summe der Quotienten, die entstehen, wenn jede dieser Größen durch den Divisor dividirt wird; oder, wenn A und B gleichartige Größen jeder Art, d aber eine unbenannte ganze Zahl bedeutet, so ist

$$(A+B):d = (A:d)+(B:d)$$

Beweis.

Man setze $A:d = Q$ und $B:d = R$
so ist nach (10. II)

$$d.Q = d.[A:d] = A \text{ und } d.R = d.[B:d] = B$$

also nach (IIII. Kap. 5.)

$$d.[Q+R] = d.Q + d.R = A+B$$

folglich nach (10. I)

$$(A+B):d = Q+R = (A:d)+(B:d)$$

Auf eben die Art läßt sich die Wahrheit des Satzes für mehr als zwo Größen A und B darthun.

1) Zusatz. Ist C eine mit A gleichartige Größe, so kann man C — A statt B setzen, dann muß A + (C — A) oder C statt A + B gesetzt werden, und man erhält

$$C:d = (A:d) + ([C-A]:d)$$

und daraus folgt

$$(C:d) - (A:d) = [C-A]:d$$

das heißt: Die Differenz zwoer gleichartiger Größen durch eine unbenannte ganze Zahl dividirt, giebt zum Quotienten die Differenz der Quotienten, die entstehen, wenn sowohl Minuend als Subtrahend durch den Divisor dividirt wird.

2) Zusatz. Es ist also auch

$$(A+A+A):d = (A:d)+(A:d)+(A:d)$$

oder

$$(3.A):d = 3.(A:d)$$

und was hier insbesondre für die Zahl 3 erwiesen worden, läßt sich eben so für jede andere unbenannte ganze Zahl m erweisen; man hat daher

$$(m.A):d = m.(A:d)$$

das heißt: Es ist einerley, ob man eine Größe jeder Art A erst mit einer unbenannten ganzen Zahl m multiplicirt, und das Product durch eine andere solche Zahl d dividirt, oder ob man A erst durch d dividirt, und den herauskommenden Quotienten mit m multiplicirt.

12. Lehrsatz. Ein Product aus einer Größe jeder Art in eine unbenannte ganze Zahl ändert sich nicht, wenn man den Multiplicand durch eine andere unbenannte ganze Zahl dividirt, und den Multiplicator mit dieser andern Zahl multiplicirt, oder auch, wenn man den Multiplicator durch eine andere ganze Zahl, welche in ihm aufgeht, dividirt, und den Multiplicand mit dieser andern Zahl multiplicirt; oder wenn A und B Größen jeder Art, n, m und k unbenannte ganze Zahlen, und zwar k eine solche, in welcher m aufgeht, bedeuten, so ist

$$\text{I. } n.B = (n.m).(B:m)$$

$$\text{II. } k.A = (k:m).(m.A)$$

Beweis.

Nach (IIII. Kap. 5. 2) Zus.) ist

$$n.(m.A) = (n.m).A$$

Da nun B eine Größe jeder Art bedeutet, so kann man hier B:m statt A setzen, dann muß aber auch m.(B:m) oder B statt m.A gesetzt werden, und wir erhalten

$$n.B = (n.m).(B:m)$$

welches die Gleichung I war. Da nun k eine ganze Zahl, in welcher m aufgeht, bedeutet, so kann man auch k:m statt

n

n setzen, dann muß aber auch $(k:m).m$ oder $m.(k:m)$ oder k statt $n.m$ gesetzt werden, und wir erhalten

$$(k:m).(m.A) = k.A$$

welches die Gleichung II war.

1) Zusatz. Aus den Gleichungen I und II folgt nach (10. I)

$$\text{III.}\quad (n.B):(n.m) = B:m$$

$$\text{IIII.}\quad (k.A):(k:m) = m.A$$

Die Gleichung III ließe sich wörtlich so ausdrücken: Ein Quotient, dessen Dividend B eine Größe jeder Art, und dessen Divisor m eine unbenannte ganze Zahl ist, ändert sich nicht, wenn man Dividend und Divisor mit einer andern unbenannten ganzen Zahl n multiplicirt.

1) Beyspiel. $(37.26992):(37.7) = 998704:259$
$= 3856 = 26992:7$

2) Beyspiel. $(59.8963):(59.13) = 528817:767$
$= 8963:13$

```
767) 528|8|17|689          13) 8963|689
     4602 ..  |                 78 ..|
     ----                       --
      6861                      116
      6136 .                    104 .
      -----                     ---
       7257                      123
       6903                      117
       ----                      ---
        354                        6
```

Ohnerachtet in diesem 2) Beyspiele keiner von den beyden Quotienten zur Zeit vollkommen angegeben werden kann, so läßt sich doch ihre Gleichheit, außer dem angeführten Beweise, noch auf folgende Art übersehen: Wenn 59mal 8963 Thaler unter 59mal 13 Personen gleich vertheilt werden sollen,

so

so kommt auf jede 13 Personen 8963 Thaler, also ist der Antheil einer Person einerley, man mag 59.8963 Thaler unter 59.13 Personen, oder 8963 Thaler unter 13 Personen gleich vertheilen.

Die Gleichung IIII läßt sich wörtlich so ausdrücken: Ein Product, dessen Multiplicand A eine Größe jeder Art, und dessen Multiplicator m eine unbenannte ganze Zahl ist, ist gleich einem Quotienten, dessen Divisor herauskommt, wenn man den Multiplicator in eine andere willkührliche ganze Zahl k, in welcher er aufgeht, dividirt, und dessen Dividend das Product ist, das entsteht, wenn der Multiplicand des vorigen Products A mit dieser willkührlichen Zahl k multiplicirt wird.

2) Zusatz. Bedeutet C eine Größe jeder Art, und k eine ganze Zahl, in welcher n aufgeht, so kann man in der Gleichung III C:n statt B und k:n statt m setzen, dann muß aber auch n.(C:n) oder C statt n.B und n.(k:n) oder k statt n.m gesetzt werden, und man erhält

$$\text{V.} \quad C:k = (C:n) : (k:n)$$

und hieraus folgt nach (10.II)

$$\text{VI.} \quad (k:n).(C:k) = C:n$$

Die Gleichung V ließe sich wörtlich so ausdrücken: Ein Quotient, dessen Dividend C eine Größe jeder Art, und dessen Divisor k eine unbenannte ganze Zahl ist, ändert sich nicht, wenn man Dividend und Divisor durch eine andere unbenannte ganze Zahl n, welche im Divisor aufgeht, dividirt.

Die Gleichung VI aber so: Ein Quotient, dessen Dividend C eine Größe jeder Art, und dessen Divisor n eine unbenannte ganze Zahl ist, ist gleich einem Producte, dessen Multiplicator herauskommt, wenn man den Divisor

visor n in eine willkührliche ganze Zahl k, worin er aufgeht, dividirt, und dessen Multiplicand gefunden wird, wenn man den Dividend C des vorigen Quotienten durch diese willkührliche Zahl k dividirt.

3) Zusatz. Bedeutet B eine Größe jeder Art, so kann man in der Gleichung II B : m statt A setzen, dann muß aber auch m.(B : m) oder B statt m. A gesetzt werden, und man erhält

$$\text{VII.} \quad k.(B:m) = (k:m).B$$

Man kann aber auch dann in der Gleichung V n.B statt C setzen, dann muß aber auch (n.B) : n oder B statt C:n gesetzt werden, und man erhält

$$\text{VIII.} \quad (n.B):k = B:(k:n)$$

Die Gleichung VII könnte wörtlich so ausgedrückt werden: Ein Quotient, dessen Dividend B eine Größe jeder Art, und dessen Divisor m eine ganze Zahl ist, wird mit einer andern ganzen Zahl k, in welcher die vorige aufgeht, multiplicirt, wenn man den Dividend B mit der ganzen Zahl multiplicirt, die herauskommt, wenn der Multiplicator k durch den Divisor m dividirt wird.

Die Gleichung VIII aber so: Ein Product, dessen Multiplicand B eine Größe jeder Art und dessen Multiplicator n eine unbenannte ganze Zahl ist, wird durch eine andere unbenannte ganze Zahl k, in welcher die vorige aufgeht, dividirt, wenn man den Multiplicand B durch die ganze Zahl dividirt, die herauskommt, wenn der Divisor k durch den Multiplicator n dividirt wird.

4) Zusatz. Bedeutet C eine Größe jeder Art, so kann man in der Gleichung III C : n statt B setzen, dann muß aber auch

auch n.(C:n) oder C statt n.B gesetzt werden, und man erhält

$$\text{IX.}\quad C:(n.m) = (C:n):m$$

Man kann aber auch dann in der Gleichung IIII C:k statt A setzen, dann muß aber auch k.(C:k) oder C statt k.A gesetzt werden, und man erhält

$$\text{X.}\quad C:(k:m) = m.(C:k)$$

Verwechselt man in der Gleichung IX die Buchstaben n und m, so hat man

$$C:(m.n) = (C:m):n$$

also auch, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung IX vergleicht, und weil n.m = m.n

$$\text{XI.}\quad (C:n):m = (C:m):n$$

Die Gleichung IX ließe sich wörtlich so ausdrücken: Ein Quotient, dessen Dividend C eine Größe jeder Art, und dessen Divisor n eine ganze Zahl ist, wird durch eine andere ganze Zahl dividirt, wenn man den Dividend C durch das Product der beyden Divisoren n und m dividirt.

Die Gleichung X aber so: Ein Quotient, dessen Dividend C eine Größe jeder Art, und dessen Divisor k eine ganze Zahl ist, wird mit einer andern ganzen Zahl m, welche in der vorigen aufgeht, multiplicirt, wenn man den Dividend C durch die ganze Zahl dividirt, die herauskommt, wenn der Divisor k durch den Multiplicator m dividirt wird.

Die Gleichung XI enthält folgende Wahrheit: Es kommt einerley Quotient heraus, wenn man eine Größe jeder Art C entweder erst mit einer ganzen Zahl n dividirt,

und den herauskommenden Quotienten abermal durch eine andere ganze Zahl m dividirt, oder wenn man die Größe C erst durch den andern Divisor m, und den herauskommenden Quotienten dann durch den ersten Divisor n dividirt.

5) Zusatz. Bedeutet A eine Größe jeder Art, so kann man in der Gleichung VI k.A statt C setzen, dann muß aber auch (k.A):k oder A statt C:k gesetzt werden, und man erhält

$$\text{XII.} \quad (k:n).A = (k.A):n$$

Diese Gleichung XII ließe sich wörtlich so ausdrücken: Ein Product, dessen Multiplicand A eine Größe jeder Art, und dessen Multiplicator k eine ganze Zahl ist, wird durch eine andere ganze Zahl n, welche in der vorigen aufgeht, dividirt, wenn man den Multiplicand A mit der ganzen Zahl multiplicirt, die herauskommt, wenn der Multiplicator k durch den Divisor n dividirt wird.

6) Zusatz. Aus der Gleichung IX folgt nach (10. II)

$$m.[C:(n.m)] = C:n$$

Bedeutet nun p eine andere ganze Zahl, so ist nach [IIII. Kap. 5. 2) Zus.]

$$p.(C:n) = p.(m.[C:(n.m)] = (p.m).[C:(n.m)$$

also

$$\text{XIII.} \quad p.(C:n) = (p.m).[C:(n.m)]$$

Diese Gleichung XIII ließe sich wörtlich so ausdrücken: Wenn eine Größe jeder Art C durch eine ganze Zahl n dividirt, und der Quotient mit einer andern ganzen Zahl p multiplicirt wird, so kommt eben das heraus, als wenn

man

man den Divisor n und Multiplicator p mit einer dritten willkührlichen Zahl m multiplicirt hätte.

7) Zusatz. Es bedeute D eine Größe jeder Art, d, f, g ganze Zahlen, und zwar g eine solche, in welcher f aufgeht, so ist nach der Gleichung III

$$g : f = (d.g) : (d.f)$$
$$D : d = (g.D) : (g.d) = (f.D) : (f.d)$$

Weil nun f in g, also auch d.f in d.g aufgeht, so kann man in der Gleichung VI k = d.g, n = d.f, C = g.D setzen, und man erhält

$$[(d.g) : (d.f)] . [(g.D) : (d.g)] = (g.D) : (d.f)$$

oder

$$\text{XIII.} \quad [g:f] . [D:d] = (g.D) : (d.f)$$

das heißt wörtlich: Wenn die ganze Zahl f in der ganzen Zahl g aufgeht, so kann man einen Quotienten, dessen Dividend D eine Größe jeder Art, und dessen Divisor d eine ganze Zahl ist, dadurch mit der ganzen Zahl g:f multipliciren, daß man das Product der beyden Dividenden g und D durch das Product der beyden Divisoren f und d dividirt. Man übersieht leicht, daß dieser Satz nicht blos von zween, sondern auch mehr Factoren wahr ist, oder daß z. B. wenn noch h, l, m, n, q, r ganze Zahlen sind, und h in l, m in n und q in r aufgeht, daß dann

$$[r:q] . [n:m] . [l:h] . [g:f] . [D:d]$$
$$= [r.n.l.g.D] : [q.m.h.f.d]$$

8) Zusatz. Weil unter den Voraussetzungen des vorigen Zusatzes d.f in d.g aufgeht, so kann man auch in der Gleichung V k = d.g, n = d.f, C = f.D setzen, und man erhält

$$[(f.D) : (d.f)] : [(d.g) : (d.f)] = (f.D) : (d.g)$$

oder

$$\text{XV.} \quad [D:d] : [g:f] = (f.D) : (d.g)$$

das

das heißt wörtlich: Wenn die ganze Zahl f in der ganzen Zahl g aufgeht, so kann man einen Quotienten, dessen Dividend D eine Größe jeder Art, und dessen Divisor d eine ganze Zahl ist, dadurch durch die ganze Zahl g:f dividiren, daß man das Product aus dem Dividend des Dividends D in den Divisor des Divisors f, durch das Product aus dem Divisor des Dividends d in den Dividend des Divisors g dividirt.

10) Zusatz. Wenn ein Product aus mehrern ganzen Factoren durch ein anderes zu dividiren ist, und es kommen im Dividend und Divisor gemeinschaftliche Factoren vor, so kann man diese gegen einander aufheben. Z. B.

$$(a.b.c.d.e.f):(b.g.d.h) = (a.c.e.f):(g.h)$$

denn nach [IIII. Kap. 14. und 12. 2) Zus.] ist

$$a.b.c.d.e.f = b.d.a.c.e.f = (b.d).(a.c.e.f)$$
$$b.g.d.h = b.d.g.h = (b.d).(g.h)$$

und die Sache erhellet nun aus der Gleichung III.

Sechs-

Sechstes Kapitel.

Von der Rechnung mit benannten Zahlen.

1. Erklärung.

Wenn eine Zahl auf keine bestimmte Einheit bezogen wird, so heißt sie eine unbenannte Zahl; wird sie aber auf eine bestimmte Einheit bezogen, so heißt sie eine benannte Zahl. So ist z. B. 17 eine unbenannte Zahl, 17 Thaler aber eine benannte, nach (Einl. 8 und 9.)

2. Bemerkung. Im bürgerlichen Leben werden oft Einheiten von höherer Art in eine Menge Einheiten niedrigerer Art eingetheilt; so ist z. B.

ein Thaler = 24 Groschen,
ein Groschen = 12 Pfennige,
ein Centner = 110 Pfund,
ein Pfund = 32 Loth,
ein Loth = 4 Quentchen.

Bey der Rechnung mit benannten Zahlen ist die Kenntniß dieser Eintheilung nothwendig.

3. Erklärung. Eine benannte Zahl, die blos Einheiten von einerley Art enthält, wie z. B. 17 Thaler, heißt eine einfache benannte Zahl; eine Größe aber, worin Einheiten von höhern und niedrigern Arten zugleich vorkommen, wie z. B. 427 Thaler 14 Groschen 8 Pfennige, heißt eine zusammengesetzte benannte Zahl.

4. Aufgabe. Einfache benannte Zahlen, die sich auf Einheiten einerley Art beziehen, zusammen zu addiren.

Auflösung.

Man addire sie zusammen, als wenn es unbenannte Zahlen wären, und beziehe die Zahl, durch welche die Summe ausgedrückt wird, auf eben dieselbe Einheit.

Be-

Beweis.

Weil z. B. $3+4+8 = 15$, so ist auch 3 Groschen + 4 Groschen + 8 Groschen = 15 Groschen nach [II. Kap. 1 und 2].

1) Zusatz. Weil ein Thaler = 24 Groschen, so ist

3 Thaler = 1 Thaler + 1 Thaler + 1 Thaler
= 24 Gr. + 24 Gr. + 24 Gr.
= (24 + 24 + 24) Gr.
= (3 . 24) Groschen.

Um also eine Menge Einheiten höherer Art durch Einheiten niedrigerer Art auszudrücken, multiplicire man die Zahl, durch welche die gedachte Menge ausgedrückt wird, mit derjenigen, welche anzeigt, aus wieviel Einheiten der niedrigern Art eine Einheit der höhern besteht. Es ist demnach

317 Thaler = 7608 Groschen = 91296 Pfenn.
weil ein Thaler = 24 Groschen, 317 . 24 = 7608
ein Groschen = 12 Pfennige, 7608 . 12 = 91296.

2) Zusatz. Eine zusammengesetzte benannte Zahl (3) z. B. 417 Thaler 18 Groschen 10 Pfennige, kann daher auf folgende Art auf die niedrigste Gattung, nämlich auf Pfennige, gebracht werden.

417 Thaler 18 Gr. 10 Pf.

```
   24
 ----
 1668
 834
 ------
 10008 }
    18 } Groschen
 ------
 10026 }
    12
 ------
 120312 }
     10 } Pfennige.
 ------
 120322 }
```

also

also ist die gedachte zusammengesetzte benannte Zahl = 120332 Pfennige.

Zur Verkürzung kann man auch die Addition und Multiplication gleich mit einander verbinden. Z. B. man soll 329 Centner 68 Pfund 23 Loth auf Lothe und Quentchen bringen.

$$
\begin{array}{r l}
329 & \text{Centn. } 68 \text{ Pf. } 23 \text{ Loth} \\
110 & \\
\hline
36258 & \text{Pfund} \\
32 & \\
\hline
72516 & \\
108774(3 & \\
(2 & \\
\hline
1160279 & \text{Loth} \\
4 & \\
\hline
4641116 & \text{Quentchen}
\end{array}
$$

also ist

329 Ct. 68 Pf. 23 Lt. = 1160279 Lt. = 4641116 Qu.

3) Zusatz. Um also umgekehrt eine Menge Einheiten von niedrigerer Art auf höhere zu bringen, dividire man die Zahl, durch welche die gedachte Menge ausgedrückt wird, durch diejenige, welche anzeigt, aus wieviel Einheiten der niedrigern Art eine Einheit der höhern besteht; der Quotient ist die Menge der Einheiten höherer Art und der Rest die noch übrigen Einheiten der niedrigern Art.

1) Beyspiel. 8985731 Pfennige auf Groschen zu bringen.

$$
3.3 + 2 = 11 \quad \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8985731 \\ 3)\overline{2995243} \\ 4)\overline{748810} \end{array}
$$

Weil also 8985731 durch 3.4 oder 12 dividirt 748810 zum

zum Quotienten und 11 zum Rest giebt, oder weil 8985731 = 748810. 12 + 11, so sind 8985731 Pfennige = 748810 Groschen 11 Pfennige. Denn nach 1) Zus. ist 748810 Groschen = (748810. 12) Pfennige, folglich 748810 Groschen + 11 Pfennige = (748810. 12) Pfennige + 11 Pfennige = (748810.12 + 11) Pfennige = 8985731 Pfennige. Eben so kann man die 748810 Groschen auf Thaler bringen:

$$\begin{array}{lll} & & 4)\underline{748810} \\ 4.2+2=10 & 2 & \quad 187202 \\ & 2 & 6)\underline{} \\ & & \quad 31200 \end{array}$$

also sind 748810 Groschen = 31200 Thaler 10 Groschen, und 8985731 Pfennige = 31200 Thaler 10 Groschen 11 Pfennige. Wegen der hier angewendeten Art zu dividiren sehe man V. Kap. 9. A)

2) Beyspiel. 78994047 Quentchen auf höhere Einheiten zu bringen.

$$\begin{array}{llll} & & 4)\underline{78994047} & \text{Qu.} \\ & 3 & \quad 19748511 & \text{Lt. 3 Qu.} \\ 4.7+3=31 & 7 & 4)\underline{} & \\ & & \quad 4937127 & \\ & 7 & 8)\underline{} & \\ & & \quad 617140 & \text{Pf. 31 Lt.} \\ 11.3+7=40 & 3 & 11)\underline{} & \\ & & \quad 56103 & \\ & & 10)\underline{} & \\ & & \quad 5610 & \text{Ct. 40 Pf.} \end{array}$$

also ist 78994047 Quentchen = 5610 Centner 40 Pf. 31 Loth 3 Quentchen.

5. Aufgabe. Zusammengesetzte benannte Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1) Man schreibe sie so unter einander, daß diejenigen Zahlen, die sich auf einerley Einheiten beziehen, unter einander zu stehen kommen, und mache darunter einen Horizontalstrich.

2) Man addire, von den Einheiten der niedrigsten Art anfangend, alle Einheiten von einerley Art nach (4) zusammen, und schreibe jede so gefundene Summe, wenn sie noch nicht soviel ist, als eine nächsthöhere Einheit, unter den Horizontalstrich unter die addirte Verticalreihe. Sonst bringe man sie nach (4. 3) Zus.) auf Einheiten der nächsthöhern Art, setze blos die übrig gebliebenen Einheiten der niedrigern Art unter den Horizontalstrich, und addire die gefundenen Einheiten der nächsthöhern Art zu den übrigen Einheiten derselben Art, weswegen man sie gleich darüber schreiben kann. So fahre man fort, bis man die Einheiten der höchsten Art addirt, und deren Summe unter den Horizontalstrich geschrieben hat.

1) Beyspiel. Man sucht die Summe folgender Geldgrößen: 378 Thlr. 13 Gr. 7 Pf.; 969 Thlr. 21 Gr. 5 Pf.; 737 Thlr. 10 Pf.; 1029 Thlr. 16 Gr. 8 Pf.; 3038 Thlr. 19 Gr.

Nach der Vorschrift 1) hat man

378 Thlr.	13 Gr.	7 Pf.
969 "	21 "	5 "
737 "	— "	10 "
1029 "	16 "	8 "
3038 "	19 "	— "

und nach der Vorschrift 2)

2	2	
378 Thlr.	13 Gr.	7 Pf.
969 "	21 "	5 "
737 "	— "	10 "
1029 "	16 "	8 "
3038 "	19 "	— "
6153 Thlr.	23 Gr.	6 Pf.

24)71|2   12)30|2
48   24
23   6

2)

2) Beyspiel. Man sucht die Summe folgender Größen: 113 Centner 96 Pfund 23 Loth 1 Quentchen; 99 Ct. 107 Pf. 21 Lt. 2 Qu.; 407 Ct. 16 Pf. 30 Lt. 3 Qu.; 989 Ct. 67 Pf. 4 Lt. 4 Qu.; 674 Ct. 47 Pf. 14 Lt.; 1049 Ct. 80 Pf. 21 Lt. 1 Qu.

Nach der Vorschrift 1) und 2) hat man

3		3		2			
113	Centner	96	Pfund	23	Loth	1	Quentchen
99	=	107	=	21	=	2	=
407	=	16	=	30	=	3	=
989	=	67	=	4	=	3	=
674	=	47	=	14	=	—	=
1049	=	80	=	21	=	1	=
3334	Centner	86	Pfund	19	Loth	2	Quentchen

110) 416|3 — 330| — 86   32) 115|3 — 96| — 19   4) 10|2 — 8| — 2

Beweis.

Bey dem Beyspiele 1) ist

7 Pf. + 5 Pf. + 10 Pf. + 8 Pf. = 2 Gr. 6 Pf.
2 Gr. + 13 Gr. + 21 Gr. + 16 Gr. + 19 Gr. = 2 Th. 23 gr.
2 Th. + 378 Th. + 969 Th. + 737 Th. + 1029 Th. + 3038 Th. = 6153 Th.

Addirt man nun beyderseits alles zusammen, und läßt zugleich beyderseits die Summe 2 Th. 2 Gr. weg, so findet man, daß die verlangte Summe 6153 Th. 23 Gr. 6 Pf. sey.

6. Aufgabe. Einfache benannte Zahlen, die sich auf Einheiten von einerley Art beziehen, zu subtrahiren.

Auflösung.

Man subtrahire sie, als wenn es unbenannte Zahlen wären, und beziehe die Zahl, welche den Rest ausdrückt, auf dieselbe Einheit.

Beweis.

Weil z. B. 15 — 6 = 9, so ist auch 15 Thaler — 6 Thaler = 9 Thaler nach [III. Kap. 1 und 2].

7. Aufgabe. Zusammengesetzte benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Man schreibe den Minuend über den Subtrahend dergestalt, daß Zahlen, die sich auf einerley Einheiten beziehen, unter einander zu stehen kommen, und ziehe unter den Subtrahend einen Horizontalstrich.

2) Man subtrahire, indem man von den niedrigsten Einheiten anfängt, die Anzahl jeder Einheiten des Subtrahends von der darüberstehenden des Minuends nach (6), und setze den Rest unter den Horzontalstrich. Wäre aber die Anzahl Einheiten von irgend einer Art im Subtrahend größer als im Minuend, so ziehe man die Anzahl der Einheiten im Subtrahend von der um soviel vermehrten Anzahl derselben Einheiten des Minuends ab, als auf die nächstfolgende Einheit höherer Art gehen, mache aber zugleich bey der Zahl dieser Einheiten höherer Art im Subtrahend einen Punkt, welcher andeutet, daß diese Zahl bey der folgenden Subtraction um eins größer zu nehmen ist.

1) Beyspiel. Man soll von 835 Thaler 19 Groschen 8 Pfennige abziehen 678 Thlr. 14 Gr. 5 Pf.

Nach der Vorschrift 1) hat man

835 Thlr.	19 Gr.	8 Pf.
678 „	14 „	5 „

und nach der Vorschrift 2)

835 Thlr.	19 Gr.	8 Pf.
678 „	14 „	5 „
157 Thlr.	5 Gr.	3 Pf.

indem

indem nach (6)

8 Pf. — 5 Pf. = 3 Pf.
19 Gr. — 14 Gr. = 5 Gr.
835 Th. — 678 Th. = 157 Th.

also ist 157 Thaler 5 Groschen 3 Pfennige der gesuchte Rest.

2) Beyspiel. Man soll von 358 Centner 57 Pfund 14 Loth 2 Quentchen, abziehen 277 Centner 95 Pfund 27 Loth 3 Quentchen.

Nach der Vorschrift 1) und 2) hat man

	110	32	4
358 Ct.	57 Pf.	14 Lt.	2 Qu.
277. „	95. „	27. „	3 „
80 Ct.	71 Pf.	18 Lt.	3 Qu.

indem (4 Qu. + 2 Qu.) — 3 Qu. = 3 Qu.
(32 Lt. + 14 Lt.) — 28 Lt. = 18 Lt.
(110 Pf. + 57 Pf.) — 96 Pf. = 71 Pf.
358 Centner — 278 Ct. = 80 Ct.

also ist 80 Centner 71 Pfund 18 Loth 3 Quentchen der gesuchte Rest.

3) Beyspiel. Man soll von 929 Centner 1 Quentchen, abziehen 677 Ct. 51 Pf. 17 Lt. 3 Qu.

Nach der Vorschrift 1) und 2) hat man

	110	32	4
929 Ct.	— Pf.	— Lt.	1 Qu.
677. „	51. „	17. „	3 „
251 Ct.	58 Pf.	14 Lt.	2 Qu.

indem (4 Qu. + 1 Qu.) — 3 Qu. = 2 Qu.
32 Lt. — 18 Lt. = 14 Lt.
110 Pf. — 52 Pf. = 58 Pf.
929 Ct. — 678 Ct. = 251 Ct.

also ist 251 Centner 58 Pfund 14 Loth 2 Quentchen der gesuchte Rest.

Beweis.

Das erste Beyspiel bedarf keines Beweises.

Im zweyten Beyspiele folgt aus der angestellten Rechnung, daß

3 Qu. + 3 Qu. = 4 Qu. + 2 Qu.
1 Lt. + 27 Lt. + 18 Lt. = 32 Lt. + 14 Lt.
1 Pf. + 95 Pf. + 71 Pf. = 110 Pf. + 57 Pf.
1 Ct. + 277 Ct. + 80 Ct. = 358 Ct.

Addirt man nun beyderseits alles zusammen, und läßt zugleich beyderseits die Summe 1 Ct. 1 Pf. 1 Lt., oder 110 Pf. 32 Lt. 4 Qu. weg, so erhält man

(277 Ct. 95 Pf. 27 Lt. 3 Qu.) + (80 Ct. 71 Pf. 18 Lt. 3 Qu.) = 358 Ct. 57 Pf. 14 Lt. 2 Qu.

also ist nach (III. Kap. 6. II.)

(358 Ct. 57 Pf. 14 Lt. 2 Qu.) — (277 Ct. 95 Pf. 27 Lt. 3 Qu.) = 80 Ct. 71 Pf. 18 Lt. 3 Qu.

Für das dritte Beyspiel gilt eben der Beweis.

8. Aufgabe. Eine einfache benannte Zahl als Multiplicand mit einer unbenannten Zahl als Multiplicator zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire sie mit einander als wenn es unbenannte Zahlen wären, und beziehe die Zahl, durch welche das Product ausgedrückt wird, auf dieselbe Einheit.

Beweis.

Weil z. B. 5.8 = 40, so ist auch 5.(8 Thaler) = 40 Thaler nach (III. Kap. 1 und 2).

9. Aufgabe. Eine zusammengesetzte benannte Zahl als Multiplicand mit einer unbenannten Zahl als Multiplicator zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

Man multiplicire nach (8), indem man von den niedrigsten Einheiten anfängt, jede der einfachen benannten Zahlen, aus welchen der Multiplicand besteht, mit dem unbenannten Multiplicator, und schreibe jedes solches Product, wenn es noch nicht soviel ist, als eine nächsthöhere Einheit, unter einen unter den Multiplicand gezogenen Horizontalstrich. Sonst bringe man ein solches Product auf dergleichen Einheiten nächsthöherer Art nach (4. 3) Zus.), setze blos die übrig gebliebenen Einheiten der niedrigern Art unter den Horizontalstrich, und addire die gefundenen Einheiten der nächsthöhern Art zum folgenden Producte. So fahre man fort, bis man die Anzahl der Einheiten von der höchsten Art gefunden, und unter den Horizontalstrich gesetzt hat.

1) Beyspiel. Man sucht das Product aus 419 Thaler 7 Groschen 3 Pfennige und 3.

419 Th.	7 Gr.	3 Pf.	(3
1257 Th.	21 Gr.	9 Pf.	

Weil 3.(3 Pfennige) = 9 Pfennige
3.(7 Groschen) = 21 Groschen
3.(419 Thaler) = 1257 Thaler

also ist 1257 Thaler 21 Groschen 9 Pfennige das verlangte Product.

2) Beyspiel. Man sucht das Product aus 517 Centner 97 Pf. 18 Loth 3 Quentchen und 137.

517 Centner	97 Pfund	18 Loth	3 Quentchen	(137
70950 Centner	59 Pfund	8 Loth	3 Quentchen	

517
137
———
3619
1551(1
517(2
(1
———
70950 Ct.

137
97
———
959
1233(0
(8
———
110)13369|121 Ct.
11
——
23
22
——
16
11
——
59 Pf.

137
18
———
32)2568|80 Pf.
256
———
8 Lt.

137
3
———
411
4)102 Lt. 3 Qu.

also ist 70950 Centner 59 Pfund 8 Loth 3 Quentchen das verlangte Product.

Beweis.

Es ist nach der Rechnung, und (8) und (4 und ebend. 3) Zus.)

137.(3 Qu.) = 411 Qu. = 102 Lt. + 3 Qu.
137.(18 Lt.) + 102 Lt. = 2568 Lt. = 80 Pf. + 8 Lt.
137.(97 Pf.) + 80 Pf. = 13369 Pf. = 121 Ct. + 59 Pf.
137.(517 Ct.) + 121 Ct. = 70950 Ct.

Addirt man nun beyderseits alles zusammen, und läßt zugleich beyderseits die Summe 121 Ct. 80 Pf. 102 Lt. weg, so erhält man

137.(517 Ct.) + 137.(97 Pf.) + 137.(18 Lt.) + 137.(3 Qu.)
= 70950 Centn. 59 Pf. 8 Lt. 3 Qu.
= 137.(517 Ctn. 97 Pf. 18 Lt. 3 Qu.)

nach (IIII. Kap. 5).

1) Zusatz. Wenn sich der Multiplicator in Factoren zerfällen läßt, so kann man mit benannten Zahlen eben so wie

wie im (IIII. Kap. 16. A)) verfahren. Sucht man z. B. 504. (378 Thaler 17 Groschen 7 Pfennige), so suche man, weil 504 = 7.8.9, erst

9.(378 Th. 17 Gr. 7 Pf.) = 3408 Th. 14 Gr. 3 Pf; dann
8.(3408 Th. 14 Gr. 3 Pf.) = 27268 Th. 18 Gr. zuletzt
7.(27268 Th. 18 Gr.) = 190881 Thaler 6 Groschen

welches das verlangte Product ist.

2) Zusatz. Bey der Multiplication überhaupt, also auch bey der Multiplication benannter Zahlen, ist der Multiplicator allemal eine unbenannte Zahl nach (Einl. 15); es kann derowegen blos der Multiplicand eine benannte Zahl seyn; wer also zwo benannte Zahlen mit einander zu multipliciren aufgiebt, verlangt etwas Widersinniges.

10. Aufgabe. Eine einfache benannte Zahl als Dividend durch eine unbenannte Zahl als Divisor zu dividiren.

Auflösung.

Man dividire die gegebene benannte Zahl, als wenn es eine unbenannte wäre, durch den gegebenen Divisor, und beziehe die unbenannte Zahl, die den Quotienten ausdrückt, auf eben dieselbe Einheit.

Beweis.

Weil 45 : 5 = 9, so ist 45 Thaler : 5 = 9 Thaler nach (V. Kap. 1 und 2.)

Zusatz. Geht die Division nicht auf, so kann auch der Quotient nicht vollständig durch eine ganze Zahl solcher Einheiten, wodurch der Dividend ausgedrückt ist, dargestellt werden. Soll man z. B. 2000 Pfennige unter 7 Personen gleich vertheilen, so kommt auf eine Person 285 Pfenn. und bleiben nach dieser Theilung noch 5 Pfennige übrig; wollte

man

man auch noch diese unter die gedachten 7 Personen gleich vertheilen, so käme davon auf jede noch etwas, das noch nicht einen ganzen Pfennig beträgt, und dessen Größe in der Lehre von den Brüchen in Betrachtung gezogen wird. Hier, wo blos von ganzen Zahlen die Rede ist, giebt man gewöhnlich den kleinern Quotienten in ganzen Zahlen an, und bemerkt dabey den Rest, der also herauskommt, wenn von dem gegebenen Dividend das Product aus dem angenommenen Quotienten und dem Divisor abgezogen wird. Ist also 2000 Pfennige der Dividend und 7 der Divisor, so ist 285 Pfennige der Quotient und (2000 — 7 . 285) Pfennige = 5 Pfennige der Rest.

11. Aufgabe. Eine zusammengesetzte benannte Zahl als Dividend durch eine unbenannte als Divisor zu dividiren.

Auflösung.

1) Man dividire die Menge der höchsten Einheiten durch den gegebenen Divisor nach (10), verwandele den Rest oder die übrig gebliebene Menge der höchsten Einheiten, nebst der gegebenen Menge der nächstniedrigern Einheiten in nächst niedrigere Einheiten nach [4. 2) Zus.]

2) Die so herauskommende Menge der nächst niedrigern Einheiten dividire man abermals durch den gegebenen Divisor nach (10), und verwandele den Rest nebst der gegebenen Menge der zunächst niedrigern Einheiten in zunächst niedrigere Einheiten nach [4. 2) Zus.]

3) Man wiederhole das Verfahren 2) so lange, bis man einmal eine Menge der niedrigsten Einheiten durch den gegebenen Divisor dividirt hat. Die Summe der herausgekommenen Quotientrn ist der verlangte Quotient, und der

bey

bey der letzten Division übrig gebliebene Rest, der Rest. Wäre aber die letzte Division vollkommen ausgegangen, so hätte man auch den Quotienten vollständig gefunden.

1) Beyspiel. Man sucht

(36542 Thaler 20 Groschen 4 Pfenn.) : 167

Nach der Vorschrift 1) hat man

```
167)36542|Thaler 20 Groschen 4 Pfennige
    334  |
    ---  |
     314 |218
     167 |
    ---- |
     1472|
     1336|Thaler
    -----
      136
       24
     ----
      544
     272(0
       (2
    -----
     3284 Groschen.
```

Nach der Vorschrift 2) und 3)

```
167) 36542 | Thaler 20 Groschen 4 Pfennige
     334   |
     ---   |
     314   | 218
     167   |
     ----  |
     1472  |
     1336  |
     ----
      136 Thaler
       24
     ----
      544
     272(0
      (2
     -----
167) 3284 | Groschen
     167  |
     ---- |
     1614 |  19
     1503 |
     ----
      111 Groschen
       12
     ----
167) 1336 | Pfennige
     1336 |   8
     ---- |
       0
```

also ist der Quotient 218 Thaler 19 Groschen 8 Pfennige vollständig.

2) Beyspiel. Man sucht

(437598 Centner 66 Pfund 21 Loth 1 Quentchen) : 479.

Nach der Vorschrift 1) 2) und 3) hat man

479) 437598 Centn. 66 Pf. 21 Loth 1 Qu.
4311
649 | 913
479
1708
1437
271 Centn.
110
479) 29876 Pf.
2874 | 62
1136
958
178 Pf.
32
356
534(1
(2
479) 5717 Loth
479 | 11
927
479
448 Loth
4
479) 1793 Quentchen
1437 | 3
356 Quentchen

also ist der Quotient 913 Ct. 62 Pf. 11 Loth 3 Quentchen, und der Rest 356 Quentchen.

Beweis.

Nach der Rechnung ist

479.

479.(913 Ct.) + 271 Ct. = 437598 Ct.
479.(62 Pf.) + 178 Pf. = 29876 Pf. = 271 Ct. 66 Pf.
479.(11 Lt.) + 448 Lt. = 5717 Lt. = 178 Pf. 21 Lt.
479.(3 Qu. + 356 Qu. = 1793 Qu. = 448 Lt. 1 Qu.

Also beyderseits alles zusammenaddirt, und zugleich die Summe von 271 Ct. 178 Pf. 448 Lt. auf beyden Seiten weggelassen,

479 (913 Ct. 62 Pf. 11 Lt. 3 Qu.) + 356 Qu.
= 437598 Ct. 66 Pf. 21 Lt. 1 Qu.

nach (IIII. Kap. 5.)

Zusatz. Läßt sich der Divisor in Factoren zerfällen, so kann man mit benannten Zahlen eben so wie im (V. Kap. 9. A) verfahren.

1) Beyspiel. Man sucht

(45909 Thaler 17 Groschen 3 Pfennige) : 63

so hat man, weil 63 = 7.9, erst

(45909 Th. 17 Gr. 3 Pf.) : 7 = 6558 Th. 12 Gr. 9 Pf.
dann (6558 Th. 12 Gr. 9 Pf.) : 9 = 728 Th. 17 Gr. 5 Pf.
welches der verlangte Quotient ist.

2) Beyspiel. Man sucht

(78753 Ct. 77 Pf. 19 Lt. 1 Qu.) : 9450

Weil 9450 = 9.7.6.5.5, so verfahre man so:

	0		78753 Ct. 77 Pf. 19 Lt. 1 Qu.
5.4+1 = 21	1	9)	8750 Ct. 4 Pf. 9 Lt. 1 Qu.
6.21+2 = 128	2	7)	1250 Ct. 6 Pf. 15 Lt. - Qu.
7.128+1 = 897	1	6)	208 Ct. 37 Pf. 23 Lt. 3 Qu.
9.897+0 = 8073	4	5)	41 Ct. 73 Pf. 17 Lt. 2 Qu.
		5)	8 Ct. 36 Pf. 22 Lt. 2 Qu.

also

also ist 8 Ct. 36 Pf. 22 Lt. 2 Qu. der Quotient, und 8073 Quentchen der Rest.

12. Bemerkung. Bey benannten Zahlen fällt der Unterschied, ob man die Definition der Division (Einl. 15) oder die [V. Kap. 8. 1) Zus.] zum Grunde legt, unverkennbar in die Augen. Nach der ersten Definition in (Einl. 15.) ist der Divisor nothwendig eine unbenannte Zahl, der Quotient aber eine benannte mit dem Dividend gleichartige Größe. Nach der zweyten Definition ist der Divisor eine mit dem Dividend gleichartige benannte Größe, und der Quotient eine unbenannte Zahl. Nach der ersten Definition ist die Division in benannten Zahlen nichts anders als die Auflösung der Aufgaben (10) und (11); nach der zweyten Definition aber die Auflösung folgender beyden Aufgaben.

13. Aufgabe. Zu untersuchen, wievielmal eine einfache benannte Zahl in einer andern einfachen benannten Zahl, die sich auf dieselben Einheiten bezieht, enthalten sey.

Auflösung.

Man dividire die letztere durch die erstere als wenn es unbenannte Zahlen wären; der unbenannte Quotient wird die verlangte Zahl seyn.

Beweis.

Weil 63 : 7. = 9, so ist auch 7.9 = 9.7 = 63 [IIII. Kap. 4], also auch [IIII. Kap. 1 und 2] 9.(7 Thaler) = 63 Thaler, also sind 7 Thaler in 63 Thalern 9mal enthalten.

Zusatz. Geht die Division nicht auf, so läßt sich das Gesuchte auch nicht vollkommen durch eine ganze Zahl ausdrücken. Untersucht man z. B., wievielmal 7 Pfennige in 2000 Pfennigen enthalten sind, so ist 285 zu klein und 286 zu groß, denn 285.(7 Pfennige) = 1995 Pfennige, und 286.(7 Pfennige) = 2002 Pfennige; also fällt die gesuchte

Zahl

Zahl zwischen 285 und 286, das heißt, sie ist 285 und noch etwas darüber, das noch nicht 1 beträgt, und dessen Größe in der Lehre von den Brüchen angegeben wird. Hier, wo blos von ganzen Zahlen die Rede ist, kann man in solchen Fällen die kleinere Zahl als die verlangte angeben, und dabey den Rest bemerken, der herauskommt, wenn von der größern benannten Zahl das Product aus der kleinern gegebenen benannten Zahl und der gefundenen unbenannten Zahl abgezogen wird. Untersucht man also, wievielmal 7 Pfennige in 2000 Pfennigen enthalten sind, so ist 285 die gesuchte Zahl und der Rest = (2000 — 285.7) Pfennige = 5 Pfennige.

14. Aufgabe. Zu untersuchen, wievielmal eine zusammengesetzte benannte Zahl in einer andern zusammengesetzten benannten Zahl enthalten sey.

Auflösung.

Man bringe beyde nach (4. 2) Zus.) auf die niedrigste vorkommende Einheit, und dividire die Menge dieser Einheiten, die den Dividend ausmacht, durch die Menge derselben, die den Divisor ausmacht. Die herauskommende unbenannte Zahl ist der Quotient, und, wenn die Division nicht aufgeht, der übrigbleibende Rest auf die gedachte niedrigste Einheit bezogen, der Rest.

1) Beyspiel. Wievielmal ist 137 Thaler 19 Groschen 11 Pfennige in 2343 Thlr. 2 Gr. 7 Pf. enthalten?

Nach (4. 2) Zus.) findet sich, daß

137 Th. 19 Gr. 11 Pf. = 39695 Pf.
2343 Th. 2 Gr. 7 Pf. = 674815 Pf.

ferner giebt 674815 durch 39695 dividirt 17 zum Quotienten, und die Division geht auf, also ist 17 der vollständige Quotient.

2)

2) Beyspiel. Wievielmal ist 257 Thaler 18 Groschen 7 Pfennige in 3788 Thlr. 14 Gr. enthalten?

Nach [4. 2) Zus.] findet man

257 Th. 18 Gr. 7 Pf. = 74239 Pf.
3788 Th. 14 Gr. — Pf. = 1091112 Pf.

ferner giebt 1091112 durch 74239 dividirt 14 zum Quotienten und 51766 zum Rest, also ist 14 der Quotient und 51766 Pfennige oder 179 Thaler 17 Groschen 10 Pfennige der Rest.

Siebentes Kapitel.

Von Potenzen.

1. Erklärung.

Ein Product aus zween oder mehrern gelichen Factoren heißt eine Potenz; so ist z. B. 7.7.7.7.7 oder 16807 eine Potenz, und zwar die 5te Potenz von 7. Der mehrmal wiederholte Factor, hier 7, heißt die Wurzel, und die Zahl, welche die Menge der gleichen Factoren angiebt, hier 5, der Exponent.

2. Erklärung. Die zweyte, dritte und vierte Potenz einer Zahl nennet man das Quadrat, den Würfel und das Biquadrat, oder die Quadratzahl, Würfel- oder Cubikzahl und Biquadratzahl von ersterer Zahl. So ist z. B. 49 das Quadrat oder die Quadratzahl, 343 der Würfel, oder die Würfelzahl, oder auch die Cubikzahl, und 2401 das Biquadrat, oder die Biquadratzahl von 7.

3. Erklärung. Man deutet eine Potenz kurz so an, daß man oben zur Rechten an die Wurzel den Exponenten mit etwas kleinerer Schrift schreibt; die fünfte Potenz von 7 z. B. bezeichnet man kurz durch 7^5. Man kann sich demnach sehr leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen:

$$4^2 = 16$$
$$5^3 = 125$$
$$6^4 = 1296$$
$$7^5 = 16807$$
$$8^6 = 262144$$

1) Zusatz. Ist die Wurzel ein zusammengesetzter Ausdruck, so muß man sie in Klammern einschließen; z. B. die fünfte Potenz der Summe $8 + 3 + 12$ wird angedeutet durch $(8 + 3 + 12)^5$.

2) Zu-

2) Zusatz. Erhebt man eine Zahl, z. B. 7, nach und nach zu verschiedenen Potenzen

$$7^2 = 49$$
$$7^3 = 343$$
$$7^4 = 2401$$

u. s. w. so erhellet, daß jede folgende Potenz 7mal so groß als die vorige, mithin umgekehrt, jede vorige Potenz der 7te Theil der vorigen ist; es ist demnach auch $7^1 = 7^2 : 7 = 49 : 7 = 7$ und $7^0 = 7^1 : 7 = 7 : 7 = 1$, oder die erste Potenz einer Zahl ist mit der Zahl selbst einerley, und die 0te Potenz einer jeden Zahl ist 1.

4. Erklärung. Die Wurzel eines gegebenen Grades aus einer gegebenen Zahl heißt diejenige Zahl, die zur sovielten Potenz erhoben, als der Grad anzeigt, die gegebene Zahl hervorbringt. So erhellet z. B. aus vorigen Gleichungen, daß 7 die Wurzel des fünften Grades, oder die fünfte Wurzel aus 16807 ist.

5. Erklärung. Die Wurzel des zweyten, dritten und vierten Grades aus einer gegebenen Zahl nennt man die Quadratwurzel, Cubikwurzel und Biqudratwurzel aus gedachter Zahl; so ist z. B. nach vorigen Gleichungen 4 die Quadratwurzel aus 16, 5 die Cubikwurzel aus 125, und 6 die Biquadratwurzel aus 1296.

6. Erklärung. Die Wurzel eines gegebenen Grades aus einer gegebenen Zahl wird dadurch angedeutet, daß man zur Rechten des Zeichens $\sqrt{}$ die Zahl, und in die obere Oeffnung desselben den Grad schreibt. So ergiebt sich z. B. aus den Gleichungen in 3. daß

$$\sqrt[3]{125} = 5$$
$$\sqrt[4]{1296} = 6$$
$$\sqrt[5]{16807} = 7$$
$$\sqrt[6]{262144} = 8$$

Bey der zweyten oder Quadratwurzel, wo also eigentlich 2 in die Oeffnung des Wurzelzeichens geschrieben werden sollte, pflegt man gewöhnlich gar nichts hineinzuschreiben; um also z. B. die Quadratwurzel aus 16, die nach obigen Gleichungen 4 ist, anzudeuten, schreibt man statt $\sqrt[2]{16}$ blos $\sqrt{16}$.

Zusatz. Soll die Wurzel irgend eines Grades aus einer zusammengesetzten Größe angedeutet werden, so pflegt man selbige nicht in Klammern einzuschließen, sondern hängt an den Eckpunkt oben zur Rechten beym Wurzelzeichen einen Horizontalstrich an, der so weit reicht, als die zusammengesetzte Größe; z. B. die fünfte Wurzel aus 200 + 35 + 8 bezeichnet man durch $\sqrt[5]{200+35+8}$. Diesemnach kann man sich sehr leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen:

$$\sqrt[3]{71-7} = 4$$
$$\sqrt[6]{192:3} = 2$$
$$\sqrt[4]{75+6} = 3$$
$$\sqrt[5]{(27+4+1)^3} = 8$$
$$\sqrt{(7+5)^2+(7-2)^2} = 13$$

7. **Lehrsatz.** Eine Potenz einer Zahl, die sich mit einer oder mehrern Nullen endigt, wird gefunden, wenn man die Zahl ohne diese Nullen zu eben derselben Potenz erhebt, und daran zur Rechten soviel Nullen anhängt, als das Product aus der Menge der Nullen an der Wurzel in den Exponenten der Potenz anzeigt. Weil z. B.

$$23^2 = 529$$
$$23^3 = 12167$$
$$23^4 = 279841$$
$$23^5 = 6436343$$

so

so ist auch

$$23000^2 = 529000000$$
$$23000^3 = 12167000000000$$
$$23000^4 = 279841000000000000$$
$$23000^5 = 6436343000000000000000$$

oder, wie man kurz nach [I. Kap. 14. 1) Zus.] schreiben könnte,

$$2\overset{3}{3}{}^2 = 52\overset{6}{9}$$
$$2\overset{3}{3}{}^3 = 1216\overset{9}{7}$$
$$2\overset{3}{3}{}^4 = 27984\overset{12}{1}$$
$$2\overset{3}{3}{}^5 = 643634\overset{15}{3}$$

Beweis

Ist in (IIII. Kap. 10. 4) Zus.) enthalten, und nach dem, was in (3. 2. Zus.) über die Bedeutung von Potenzen, deren Exponent 1 oder 0 ist, gesagt worden, gilt dieser Satz auch, wenn der Exponent 1 oder 0 ist.

1) Zusatz. 1 giebt zu jeder Potenz erhoben wieder 1, also ist eine Potenz von 10 nichts anders als 1 mit soviel zur Rechten angehängten Nullen, als der Exponent der Potenz anzeigt; z. B. $10^4 = 10000$.

2) Zusatz. Wenn man über die niedrigste von einer Reihe Ziffern einen Ordnungsexponenten schreibt, so ist das eben soviel, als wenn man die Zahl, welche gedachte Ziffernreihe an sich bezeichnet, mit derjenigen Potenz von 10 multiplicirt, deren Exponent dem vorigen Ordnungsexponenten gleich ist; z. B.

$$437\overset{5}{6} = 4376 . 10^5$$

Denn

nach (I. Kap. 14. 1) Zus.) ist $437\overset{5}{6} = 437600000$
nach (IIII. Kap. 9.) . $437600000 = 4376 . 100000$
nach vorigem Zusatze . $4376 . 100000 = 4376 . 10^5$

also die Sache bewiesen, und man übersieht auch leicht, daß dies wahr ist, wenn der Exponent 1 oder 0 ist.

3) Zusatz. Was im vorigen Zusatze von einer Reihe Ziffern gesagt worden, gilt auch von einer einzigen Ziffer; so ist z. B. $\overset{4}{8} = 8.10^4$ folglich ist

$$84763 = \overset{4}{8} + \overset{3}{4} + \overset{2}{7} + \overset{1}{6} + \overset{0}{3}$$
$$= 8.10^4 + 4.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 3.10^0$$

oder bey einer jeden auf die gewöhnliche Art geschriebenen Zahl kann man jede Ziffer, womit sie geschrieben ist, als gewöhnliche Einheiten ansehen, die mit derjenigen Potenz von 10, deren Exponent dem Ordnungsexponenten der Ziffer gleich ist, multiplicirt ist.

8. Lehrsatz. Ein Product aus zween oder mehrern Factoren, deren jeder eine Potenz von einerley Wurzel ist, ist wieder eine Potenz von eben der Wurzel, deren Exponent der Summe der Exponenten von allen Factoren gleich ist.

Beweis.

Es bedeute a eine ganze Zahl, so ist nach (IIII. Kap. 12. 2) Zus.)

$$a^3a^4 = (a.a.a).(a.a.a.a) = a.a.a.a.a.a.a = a^7 = a^{3+4}$$

und was hier beyspielsweise für die beyden Exponenten 3 und 4 erwiesen worden, läßt sich eben so für alle andere Exponenten erweisen. Bedeuten daher m und n ebenfalls ganze Zahlen, so ist

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

und was jetzt für zwey Factoren erwiesen worden, läßt sich eben so für mehrere erweisen.

1) Zusatz. Der vorgetragene Lehrsatz gilt auch, wenn unter den Exponenten von Factoren 1 oder 0 vorkommt; so ist z. B.

$$a^4 . a^1 . a^3 . a^0 . a^1 . a^6 = a^{15}$$

2) Zu-

2) Zusatz. Bedeutet k eine ganze Zahl, die nicht kleiner als n ist, so läßt sich n von k abziehen, und man hat

$$a^n . a^{k-n} = a^{n+(k-n)} = a^k$$

mithin nach (V. Kap. 10. I)

$$a^{k-n} = a^k : a^n$$

das heißt: Der Quotient, der entsteht, wenn eine Potenz von einer Zahl durch eine andere Potenz derselben, die nicht höher als die vorige ist, dividirt wird, ist wieder eine Potenz derselben Zahl, deren Exponent herauskommt, wenn von dem Exponenten des Dividends der Exponent des Divisors abgezogen wird. Setzt man n statt k, so bekommt man

$$a^n : a^n = a^0$$

welches offenbar richtig ist, denn $a^n : a^n = 1$, und a^0 ebenfalls.

3) Zusatz. Es ist also auch

$$a^n . a^n . a^n = a^{n+n+n}$$

oder

$$(a^n)^3 = a^{3 \cdot n}$$

und was hier beyspielsweise für die Zahl 3 erwiesen worden, läßt sich eben so für jede andere ganze Zahl m erweisen, es ist daher allgemein

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

das heißt: Wenn man eine Zahl zu einer Potenz, und diese Potenz wieder zu einer andern erhebt, so ist das eben soviel, als wenn man die erste Zahl zu einer Potenz erhoben hätte, deren Exponent dem Producte der beyden vorigen gleich ist. Auch gilt diese Behauptung, wenn von den Exponenten n und m entweder einer oder beyde 0 oder 1 sind.

9. Lehr-

9. Lehrsatz. Eine Potenz eines Products aus zween oder mehrern Factoren wird gefunden, wenn man jeden Factor zu eben der Potenz erhebt.

Beweis.

Nach (IIII. Kap. 14.) ist, wenn a und b ganze Zahlen bedeuten,

$$a.b.a.b.a.b = a.a.a.b.b.b$$

und nach [IIII. Kap. 12, 2) Zus.]

$$a.b.a.b.a.b = (a.b).(a.b).(a.b) = (a.b)^3$$

$$a.a.a.b.b.b = (a.a.a).(b.b.b). = a^3.b^3$$

folglich

$$(a.b)^3 = a^3.b^3$$

und was hier beyspielsweise für den Exponenten 3 erwiesen worden, gilt eben so für jeden andern. Bedeutet also m eine ganze Zahl, oder auch 1 oder 0, so ist

$$(a.b)^m = a^m.b^m$$

Auf ähnliche Art läßt sich der Beweis für mehr als zween Factoren führen.

1) Zusatz. Bedeutet c eine ganze Zahl, in welcher a aufgeht, so kann man in voriger Gleichung c : a statt b setzen, dann muß aber auch statt a. b nun a. (c : a), welches nach (V. Kap. 10. II) soviel als c ist, gesetzt werden, und man erhält

$$c^m = a^m.(c:a)^m$$

also nach (V. Kap. 10. I.)

$$(c:a)^m = c^m : a^m$$

das heißt: Ein Quotient zwoer ganzer Zahlen, der sich vollkommen auf eine ganze Zahl bringen läßt, wird zu einer Potenz erhoben, wenn man Divisor und Dividend zu eben der Potenz erhebt.

2)

2) Zusatz. Es ist demnach auch

$$(a.a.a.a)^m = a^m.a^m.a^m.a^m$$

oder

$$(a^4)^m = (a^m)^4$$

und was hier beyspielsweise für den Exponenten 4 erwiesen worden, gilt eben so für jeden andern. Bedeutet n also eine ganze Zahl, so ist

$$(a^n)^m = (a^m)^n$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet aber auch daraus, daß nach [8. 3) Zus.] beyde Glieder derselben $= a^{n.m}$ sind.

Ach-

Achtes Kapitel.

Von Maaß, und Vielfachen, absoluten und relativen Primzahlen, und Zerfällung der Zahlen in ihre Factoren.

1. Erklärung.

Wenn eine Größe A in einer andern B sovielmal enthalten ist, als eine ganze Zahl anzeigt, so sagt man, A ist ein Maaß von B, oder B wird von A gemessen, und B ist ein Vielfaches von A. Weil z. B. 91 = 7. 13, so ist 13 ein Maaß von 91, oder 91 wird von 13 gemessen, und 91 ist ein Vielfaches von 13.

2. **Grundsatz.** Eine angebliche Größe, die etwas ist, kann nicht kleiner als ihr Maaß seyn, und jede Größe wird von sich selbst gemessen, oder ist ein Vielfaches von sich selbst.

3. **Erklärung.** Eine ganze Zahl, die von keiner andern ganzen Zahl, die größer als 1, und kleiner als sie selbst ist, gemessen wird, heißt eine absolute Primzahl; z. B. weil 17 durch keine der ganzen Zahlen von 2 bis 16 sich ohne Rest dividiren läßt, so wird sie auch von keiner dieser Zahlen gemessen [V. Kap. 8. 2) Zus.], ist also eine absolute Primzahl.

Anmerkung. Eine Tafel der absoluten Primzahlen von 1 bis 100003 findet sich in Vega's Vorlesungen über die Mathematik. Erster Band. Wien 1782. 8. Seite 305.

4. **Erklärung.** Wenn mehrere Größen B, C, D, E von einer andern A gemessen werden, so heißt A ein gemeinschaftliches Maaß dieser Größen B, C, D, E; z. B. 3 ist ein gemeinschaftliches Maaß von 15, 21, 27, 39, 51.

5. Er-

5. Erklärung. Wenn mehrere ganze Zahlen keine ganze Zahl, die größer als 1 ist, zum gemeinschaftlichen Maaße haben, so heißen sie relative Primzahlen; z. B. 15, 21, 35; gemeiniglich wird dieser Ausdruck nur von zwo Zahlen gebraucht.

Zusatz. Kommt unter mehrern ganzen Zahlen nur eine einzige absolute Primzahl vor, so sind es relative Primzahlen, den einzigen Fall ausgenommen, wenn die gedachte absolute Primzahl größer als 1, und zugleich ein gemeinschaftliches Maaß aller übrigen ist; wie z. B. bey 3, 12, 15, 21, wo die gedachte absolute Primzahl 3 selbst das gemeinschaftliche Maaß ist. Es können aber mehrere Zahlen relative Primzahlen seyn, ohne daß eine einzige absolute Primzahl darunter ist, wie im obigen Beyspiele, wo keine der relativen Primzahlen 15, 21, 35 eine absolute Primzahl ist.

6. Erklärung. Wenn eine Größe A von mehrern andern B, C, D, E gemessen wird, so heißt A ein gemeinschaftliches Vielfaches der Größen B, C, D, E; z. B. 120 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 10, 15, 20, 24.

1) Zusatz. Wenn mehrere Größen eines gemeinschaftlichen Vielfachen fähig sind, so giebt es ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches dieser Größen. Denn es sey E die größte unter diesen Größen. Man versuche nach der Reihe die Größen E, 2. E, 3. E, 4. E u. s. w. ob sie sich von allen übrigen messen lassen; die erste, die diese Eigenschaft hat, wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Größen seyn, und daß man einmal auf eine solche kommen müsse, folgt aus der Voraussetzung, weil die Größen B, C, D, E eines gemeinschaftlichen Vielfachen fähig sind.

2) Zusatz. Das Product aus mehrern ganzen Zahlen ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von ihnen, also haben

nach 1) Zus. mehrere ganze Zahlen allemal ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches, welches man nach 1) Zusatz durch Versuche bestimmen könnte. Wären z. B. die Zahlen 12, 15, 18, 20, so ist

$$
\begin{aligned}
1.20 &= 20 = 1.18 + 2\\
2.20 &= 40 = 2.18 + 4\\
3.20 &= 60 = 3.18 + 6\\
4.20 &= 80 = 4.18 + 8\\
5.20 &= 100 = 5.18 + 10\\
6.20 &= 120 = 6.18 + 12\\
7.20 &= 140 = 7.18 + 14\\
8.20 &= 160 = 8.18 + 16\\
9.20 &= 180 = 10.18 = 12.15 = 15.12
\end{aligned}
$$

also ist 180 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von den Zahlen 12, 15, 18, 20.

7. Lehrsatz. Wenn mehrere Größen B, C, D, E von einer andern gemessen werden, so wird auch ihre Summe $B+C+D+E$ von A gemessen.

Beweis.

Denn die Summe der ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in B, C, D, E enthalten ist, ist gewiß eine ganze Zahl, und diese zeigt an, wievielmal A in $B+C+D+E$ enthalten ist, nach [IIII Kap. 5].

Beyspiel. Weil

$$
\begin{aligned}
21 &= 3.7\\
35 &= 5.7\\
56 &= 8.7\\
91 &= 13.7
\end{aligned}
$$

so ist auch $21+35+56+91 = (3+5+8+13).7$ oder $203 = 29.7$; siehe (IIII Kap. 5.):

8. Lehrsatz. Wenn zwo Größen B und C von einer dritten A gemessen werden, so wird auch ihre Differenz $B-C$ von A gemessen.

Be-

Beweis.

Denn die Differenz der beyden ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in B und C enthalten ist, ist gewiß eine ganze Zahl, und diese zeigt an, wievielmal A in B − C enthalten ist, nach (IIII. Kap. 5. 1) Zus.).

Beyspiel. Weil $143 = 11.13$
und $91 = 7.13$
so ist auch $143 - 91 = (11 - 7).13$
oder $52 = 4.13$
siehe (IIII. Kap. 5. 1) Zus.).

9. Lehrsatz. Wenn die Größe C von B, und B von A gemessen wird, so wird auch C von A gemessen, und die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in C enthalten ist, wird sowohl von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist, als auch von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist, gemessen.

Beweis.

Die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist, sey m, oder $B = m.A$; diejenige, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist, sey n, oder $C = n.B$, und m mit n multiplicirt gebe k oder $n.m = m.n = k$, so ist k gewiß eine ganze Zahl, und nach [IIII. Kap. 5. 2) Zus.]

$$A = (n.m).A = n.(m.A) = n.B = C$$

also ist das Product der beyden ganzen Zahlen n und m die Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in C enthalten ist, und dieses Product wird sowohl von n als auch von m gemessen.

Beyspiel. Weil $60 = 5.12$, und $12 = 3.4$, so ist nach [IIII. Kap. 5. 2) Zus.]

$$60 = 5.12 = 5.(3.4) = (5.3).4 = 15.4$$

und $15 = 3.5 = 5.3$.

1) Zusatz. Ist A ein Maaß von B und B ein gemeinschaftliches Maaß mehrerer Größen, so ist auch A ein gemeinschaft-

schaftliches Maaß derselben Größen, und die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in diesen Größen enthalten ist, werden sämmtlich von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist, gemessen, und sind demnach, wenn letztere größer als 1, oder B > A ist, nicht relative Primzahlen.

2) Zusatz. Ist C ein Vielfaches von B, und B ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Größen, so ist auch C ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben Größen, und die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal diese Größen in C enthalten sind, werden sämmtlich von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist, gemessen, sind also, wenn letztere größer als 1 oder C > B ist, nicht relative Primzahlen.

10. Lehrsatz. Wenn die Größe C sowohl von B als auch von A gemessen wird, und die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in C enthalten ist, von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist, gemessen wird, so wird auch B von A gemessen.

Beweis.

Die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in C enthalten ist, sey k, oder $C = k.A$, und diejenige, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist, sey n, oder $C = n.B$, die ganze Zahl endlich, welche anzeigt, wievielmal n in k enthalten ist, sey m, oder $k : n = m$, so ist nach (V. Kap. 10. I)

$$C : n = B$$

und weil n in k aufgeht, nach [V. Kap. 12. 5) Zus XII]

$$B = C : n = (k.A) : n = (k : n).A = m.A$$

also ist der Quotient $k : n$, der nach der Voraussetzung eine ganze Zahl ist, diejenige, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist.

Bey-

Beyspiel. Weil $11165 = 5.2233 = 35.319$

und $35 : 5 = 7$

so ist auch nach [V. Kap. 10. I und ebend. 12. 5) Zus. XII]

$$2233 = (35.319) : 5 = (35 : 5) . 319 = 7 . 319$$

11. Lehrsatz. Ist C ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Größen D, E, F u. s. w. und die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal diese Größen in C enthalten sind, nicht relative Primzahlen, so giebt es noch ein anderes gemeinschaftliches Vielfaches der Größen D, E, F u. s. w. welches ein Maaß von C, und also kleiner als C ist.

Beweis.

Weil die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal D, E, F u. s. w. in C enthalten ist, nicht relative Primzahlen sind, so giebt es eine ganze Zahl n größer als 1, von welcher alle diese Zahlen gemessen werden. Der nte Theil von C oder C : n heiße B, so ist C : n = B, mithin auch nach (V. Kap. 10. II) C = n.B. Da nun C von B und D gemessen wird, und auch die Zahl, welche anzeigt, wievielmal D in C enthalten ist, von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist, nämlich von n gemessen wird, so wird nach (10) auch B von D gemessen. Eben so wird bewiesen, daß B auch von E, F u. s. w. gemessen werde, also ist B auch ein gemeinschaftliches Vielfaches von D, E, F u. s. w. ein Maaß von C, da C : n = B und zugleich kleiner als C, da n > 1 ist.

Beyspiel. Weil $315.8 = 210.12 = 180.14 = 140.18 = 2520$, so ist 2520 ein gemeinschaftliches Vielfaches von 8, 12, 14, 18; die Zahlen 315, 210, 180, 140, sind aber nicht relative Primzahlen, sondern werden alle von 5 gemessen, indem

$$\left.\begin{array}{l}315 = 63.5 = 5.63\\ 210 = 42.5 = 5.42\\ 180 = 36.5 = 5.36\\ 140 = 28.5 = 5.28\end{array}\right\}\text{nach (IIII. Kap. 4).}$$

also ist auch

$$(5.63).8 = (5.42).12 = (5.36).14 = (5.28).18 = 2520$$

oder, welches nach (IIII. Kap. 5. 2) Zus.) dasselbe ist,

$$5.(63.8) = 5.(42.12) = 5.(36.14) = 5.(28.18) = 2520$$

mithin

$$63.8 = 42.12 = 36.14 = 28.18 = 2520 : 5 = 504$$

und 504, welches kleiner als 2520 und zugleich ein Maaß davon ist, ist auch ein gemeinschaftliches Vielfaches von 8, 12, 14, 18.

Zusatz. Ist also C ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Größen, und giebt es kein kleineres, oder doch wenigstens kein kleineres, das zugleich ein Maaß von C ist, so sind die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal diese Größen in C enthalten sind, relative Primzahlen.

12. Lehrsatz. Wenn die Größen C und B von A gemessen werden, und die Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in C enthalten ist, von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist, gemessen wird, so wird auch C von B gemessen.

Beweis.

Die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in C enthalten ist, sey k oder $C = k.A$, diejenige, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist, sey m, oder $B = m.A$, diejenige endlich, welche anzeigt, wievielmal m in k enthalten ist, sey n oder $k = n.m$, so ist nach (IIII. Kap. 5. 2) Zus.)

$$C = k.A = (n.m).A = n.(m.A) = n.B$$

also

also ist n die Zahl, welche anzeigt, wievielmal B in C enthalten ist.

Beyspiel. Weil $462 = 42.11$; $66 = 6.11$
und $42 = 7.6$

so ist auch

$$462 = 42.11 = (7.6).11 = 7.(6.11) = 7.66$$

13. Lehrsatz. Wenn A ein gemeinschaftliches Maaß mehrerer Größen D, E, F u. s. w. ist, und die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in diesen Größen enthalten ist, nicht relative Primzahlen sind, so giebt es noch ein anderes gemeinschaftliches Maaß der Größen D, E, F u. s. w. welches ein Vielfaches von A, folglich größer als A ist.

Beweis.

Weil die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in den Größen D, E, F u. s. w. enthalten ist, nicht relative Primzahlen sind, so giebt es eine ganze Zahl $n > 1$, von welcher alle diese Zahlen gemessen werden, und man kann $n.A = B$ setzen. Da nun D und B von A gemessen werden, und die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal A in D enthalten ist, von derjenigen, welche anzeigt, wievielmal A in B enthalten ist, nämlich von n gemessen wird, so wird nach (12) auch D von B gemessen. Eben so wird bewiesen, daß auch E, F u. s. w. von B gemessen wird, also ist B auch ein gemeinschaftliches Maaß von D, E, F u. s. w. ein Vielfaches von A, und zugleich größer als A, da $n > 1$ ist.

Beyspiel. Weil
$$36 = 9.4$$
$$60 = 15.4$$
$$84 = 21.4$$
$$120 = 30.4$$

so ist 4 ein gemeinschaftliches Maaß von 36, 60, 84, 120; die Zahlen 9, 15, 21, 30 sind aber nicht relative Primzahlen, sondern werden alle von 3 gemessen, indem

$9 = 3.3$, $15 = 5.3$, $21 = 7.3$, $30 = 10.3$,
also ist auch

$$36 = (3.3).4 = 3.(3.4)$$
$$60 = (5.3).4 = 5.(3.4)$$
$$84 = (7.3).4 = 7.(3.4)$$
$$120 = (10.3).4 = 10.(3.4)$$

und $3.4 = 12$, welches größer als 4 und zugleich ein Vielfaches davon ist, ist auch ein gemeinschafticbes Maaß von 36, 60, 84, 120.

Zusatz. Ist also A ein gemeinschaftliches Maaß mehrerer Größen, und giebt es kein größeres, oder doch wenigstens kein größeres, das zugleich ein Vielfaches von A ist, so sind die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in diesen Größen enthalten ist, relative Primzahlen.

14. Lehrsatz. Jedes gemeinschaftliche Vielfache zwoer oder mehrerer Größen wird von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Größen gemessen.

Beweis.

Giebt es von zwo oder mehreren Größen ein gemeinschaftliches Vielfaches, so giebt es nach [6. 1) Zus.] auch ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches derselben. Nun sey M dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache, und C irgend einer anderes, also $C > M$. Würde nun C nicht von M gemessen, so bliebe, wenn man M zu wiederholtenmalen von C abzöge, einmal eine Größe R übrig, welche kleiner als M ist, und es wäre, wenn n die Zahl ist, welche anzeigt, wievielmal M von C abgezogen worden ist, $C - n.M = R$. Weil nun M ein gemeinschaftliches Vielfaches aller Größen ist, so ist nach [9. 2) Zus.] auch n.M ein solches, aber auch C, mithin wäre dann nach (8) auch $C - n.M$, oder R ein gemeinschaftliches Vielfaches aller dieser Größen, folglich, da $R < M$, wäre M nicht das kleinste, wider die Voraussetzung.

Zu-

Zusatz. Ist also C zwar ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Größen D, E, F u. s. w. aber nicht das kleinste, so wird es doch von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Größen gemessen, und also sind die Zahlen, welche anzeigen, wievielmal diese Größen in C enthalten sind, nicht relative Primzahlen nach (9. 2. Zus.) Ist also C ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Größen, und die Zahlen, welche anzeigen, wievielmal diese Größen in C enthalten sind, relative Primzahlen, so ist C das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Größen.

15. Lehrsatz. Wenn es von zwo ganzen Zahlen zwo Vielfache giebt, die nur um 1 unterschieden sind, so sind es relative Primzahlen.

Beweis.

Denn gäbe es eine ganze Zahl größer als ~~die~~ 1 von welcher beyde ganze Zahlen gemessen würden, so würden auch nach (9) beyde Vielfache von dieser ganzen Zahl gemessen, mithin auch nach (8) ihre Differenz, welche 1 ist, also würde 1 von einer ganzen Zahl, größer als 1, gemessen, welches nach (2) unmöglich ist.

Beyspiel. $4 \cdot 44 - 5 \cdot 35 = 176 - 175 = 1$ also sind 44 und 35 relative Primzahlen.

16. Lehrsatz. Wenn a, b, c, d ganze Zahlen, und zwar a und b relative Primzahlen sind, aber auch $a.d = b.c$ ist, so giebt es eine ganze Zahl k von der Beschaffenheit, daß $c = k.a$ und $d = k.b$ ist, folglich wird c von a und d von b gemessen.

Beweis.

Es sey $a.d = b.c = q$, so ist, weil a und b relative Primzahlen sind, nach (14. Zus.) q das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von c und d. Aber auch das Product $c.d = d.c$, welches p heißen mag, ist ein gemeinschaftli-

ches Vielfaches von c und d, also wird es nach (14) von q gemessen. Nennt man nun die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal q in p enthalten ist, k, so ist

$$p = k.q$$

oder nach [III. Kap. 5. 2) Zus.]

$$c.d = d.c = k.(a.d) = k.(b.c) = (k.a).d = (k.b).c$$

also $c = k.a$ und $d = k.b$

Beyspiel. Da 35 und 72 relative Primzahlen sind, und $35.792 = 72.385 = 27720$, so wird auch 385 von 35 und 792 von 72 gemessen; es ist nämlich $385 = 11.35$ und $792 = 11.72$.

1) Zusatz. Sind a und b relative Primzahlen, c eine andere ganze Zahl, und wird b.c von a gemessen, so wird auch c von a gemessen. Denn die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal a in b.c enthalten ist, heiße d, so ist $b.c = d.a = a.d$, und es folgt die Sache aus dem bewiesenen Satze.

2) Zusatz. Wenn ein Product aus mehrern Factoren, deren jeder eine ganze Zahl ist, von einer andern ganzen Zahl a gemessen wird, und jeder der Factoren des Productes, einen einzigen ausgenommen, mit a verbunden ein Paar relative Primzahlen giebt, so wird der ausgenommene Factor selbst von a gemessen. Denn wenn a und b, a und c, a und d, a und e relative Primzahlen sind, und doch das Product b. c. d. e. f von a gemessen wird, so wird nach 1) Zus. weil a und b relative Primzahlen sind, auch c. d. e. f von a gemessen, und also, weil a und c relative Primzahlen sind, auch d. e. f, und also, weil a und d relative Primzahlen sind, auch e. f, und also, weil a und e relative Primzahlen sind, auch f. Giebt demnach von einem Producte aus mehrern Factoren, deren jeder eine ganze Zahl ist, jeder Factor, einen einzigen ausgenommen, mit a verbunden ein Paar relative

Prim-

Primzahlen, und wird der ausgenommene Factor nicht von a gemessen, so wird auch das Product nicht von a gemessen. Daß umgekehrt, wenn von einem Producte aus mehrern Factoren, deren jeder eine ganze Zahl ist, ein einziger Factor von einer ganzen Zahl a gemessen wird, auch das ganze Product von a gemessen werde, folgt schon aus (9).

3) Zusatz. Wenn von einem Producte aus zween oder mehrern ganzen Factoren jeder Factor mit einer andern ganzen Zahl a verbunden ein Paar relative Primzahlen giebt, so sind das ganze Product und a relative Primzahlen. Denn gesetzt es wären, wenn a und b, a und c, a und d, a und e relative Primzahlen sind, das Product b. c. d. e und a nicht relative Primzahlen, so gäbe es eine ganze Zahl $h > 1$, von welcher sowohl b. c. d. e als a gemessen würde. Es sey also h in a fmal, und in b. c. d. e gmal enthalten, oder $a = f.h$ und $b.c.d.e = g.h$, so ist, weil $h > 1$, auch $f < a$, und wenn man die erste Gleichung mit g, und die andere mit f multiplicirt, mit Hülfe von (IIII Kap. 13.)

$$g.a = g.f.h = f.g.h = f.b.c.d.e = b.c.d.e.f.$$

Es würde also b.c.d.e.f von a gemessen, und es müßte also, nach 2) Zusatz, weil a und b, a und c, a und d, a und e relative Primzahlen sind, f von a gemessen werden, welches nach (2) unmöglich, da $f < a$.

4) Zusatz. Wenn jede der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ soviel ihrer seyn mögen, mit jeder der Zahlen a, b, c, d... soviel ihrer seyn mögen, verbunden ein Paar relative Primzahlen giebt, so sind auch die Producte $\alpha.\beta.\gamma.\delta\,..$ und a. b. c. d... relative Primzahlen. Denn weil jede der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. mit jeder der Zahlen a, b, c, d u. s. w. verbunden ein Paar relative Primzahlen giebt, so giebt nach 3) Zus. jede der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. mit dem Producte a. b. c. d.. verbunden, ein Paar relative Primzahlen, mithin sind ebenfalls nach 3) Zus. die Producte $\alpha.\beta.\gamma.\delta\ldots$ und a. b. c. d.. relative Primzahlen.

5) Zusatz. Sind demnach zwo Zahlen a und b relative Primzahlen, so sind auch jede zwo Potenzen von ihnen relative Primzahlen. Weil z. B. 44 und 35 relative Primzahlen sind, so sind auch 44^8 und 35^{11} relative Primzahlen.

6) Zusatz. Zwo verschiedene absolute Primzahlen sind (5. Zus.) allemal auch relative Primzahlen, mithin auch nach 5) Zus. zwo Potenzen von ihnen. Ein Product aus zween oder mehrern Factoren, die entweder absolute Primzahlen, oder Potenzen absoluter Primzahlen sind, und eine andere von diesen verschiedene absolute Primzahl, oder eine Potenz davon, sind also nach 5) Zus. auch relative Primzahlen; ist also diese andere absolute Primzahl eine andere als 1, so kann das Product von der andern absoluten Primzahl, oder einer Potenz von ihr unmöglich gemessen werden. So kann z. B. das Product $2^9.11^3.13.31$ weder von den Zahlen 23 oder 7, noch von einer Potenz dieser Zahlen gemessen werden.

7) Zusatz. Ein Product aus zween oder mehrern Factoren, die alle größer als 1, und entweder absolute Primzahlen, oder Potenzen absoluter Primzahlen sind, kann von einer Potenz einer der darin vorkommenden absoluten Primzahlen, deren Exponent größer ist als der im Producte, unmöglich gemessen werden. Z. B. das Product $2^9.11^3.13.31$ kann unmöglich von 11^7 gemessen werden. Denn wäre das möglich, so sey a die ganze Zahl, welche anzeigt, wievielmal 11^7 in $2^9.11^3.13.31$ enthalten ist, oder es sey

$$2^9.11^3.13.31 = a.11^7$$

so ist nach (VII. Kap. 8)

$$11^7 = 11^3.11^4$$

mithin auch nach [IIII. Kap. 13 und 11) Zus.]

$$11^3.2^9.13.31 = 2^9.11^3.13.31 = a.11^7 = a.11^3.11^4$$
$$= 11^3.a.11^4$$

folglich

folglich auch)

$$2^9.13.31 = a.11^4$$

also würde $2^9.13.31$ von 11^4 gemessen, welches nach 6) Zus. unmöglich ist.

8) Zusatz. Jede Zahl, die keine absolute Primzahl ist, läßt sich in Factoren zerlegen, die alle größer als 1, und absolute Primzahlen sind. Denn da eine solche Zahl keine absolute Primzahl ist, so läßt sie sich in zween Factoren zerlegen, deren jeder eine ganze Zahl größer als 1 ist. Wären einer oder beyde Factoren noch nicht absolute Primzahlen, so kann man sie von neuem zerlegen, und mit dieser Zerlegung so lange fortfahren, bis alle Factoren absolute Primzahlen sind. Die Zahl sey z. B. 42, so ist

$$42 = 6.7$$

Von diesen beyden Factoren ist 7 eine absolute Primzahl, aber 6 nicht, man zerfälle also 6 in ihre Factoren 2 und 3, so hat man nach (IIII. Kap. 12)

$$42 = (2.3).7 = 2.3.7$$

wo nun alle drey Factoren absolute Primzahlen sind. Die Zahl sey 120, so ist

$$120 = 12.10$$

Von diesen beyden Factoren ist weder 12 noch 10 eine absolute Primzahl; man zerfälle also beyde in ihre Factoren, nämlich 12 in 3 und 4, und 10 in 2 und 5, so hat man

$$120 = 4.3.5.2$$

Von diesen Factoren ist 4 keine absolute Primzahl, man zerfälle sie also in ihre Factoren 2 und 2, so ist

$$120 = 2.2.3.5.2$$

wo nun alle Factoren absolute Primzahlen sind. Da die Ordnung der Factoren willkührlich verändert werden kann, so kann man, wenn gleiche Factoren vorkommen, diese hinter einander setzen, es ist also

$$120 = 2.2.2.3.5 = 2^3.3.5$$

Jede

Jede Zahl, die nicht absolute Primzahl ist, kann also entweder als eine Potenz einer absoluten Primzahl, oder als ein Product aus zween oder mehreren Factoren dargestellt werden, deren jeder eine absolute Primzahl größer als 1, oder eine Potenz einer solchen absoluten Primzahl ist.

9) Zusatz. Eine Zahl, die keine absolute Primzahl ist, kann nur auf eine einzige Art in Factoren zerlegt werden, die alle absolute Primzahlen größer als 1 sind. Denn gienge es auf zwo Arten an, so kämen entweder in der einen Art Primzahlen vor, die in der andern nicht vorkommen, oder es kämen in beyden Arten zwar einerley Primzahlen vor, aber die Exponenten der Potenzen wären verschieden. Das erste aber widerspricht dem 6) Zusatze, und das zweyte dem 7) Zusatze. Könnte z. B. eine Zahl auf die beyden Arten $2^5.3^4.7.13^2$ und $2^8.11^3.19$ in solche Factoren zerlegt werden, so wäre $2^5.3^4.7.13^2 = 2^8.11^3.19$, also würde $2^5.3^4.7.13^2$ von 11^3 gemessen, welches nach 6) Zus. unmöglich ist. Könnte ferner eine Zahl auf die beyden Arten $2^5.3^4.7.13^2$ und $2^{12}.3^2.7^3.13$ in solche Factoren zerlegt werden, so wäre $2^5.3^4.7.13^2 = 2^{12}.3^2.7^3.13$, also würde $2^5.3^4.7.13^2$ von 2^{12} gemessen, welches nach 7) Zus. unmöglich ist.

17. Aufgabe. Merkmale anzugeben, nach denen man beurtheilen kann, ob eine gegebene vielziffrige Zahl von gewissen Zahlen gemessen wird.

Auflösung.

A) Jede Zahl, die sich mit einer, zwo oder drey Nullen endigt, wird von 10, 100, oder 1000 gemessen; da nun $10 = 2.5$, $100 = 4.25$, $1000 = 8.125$, so wird (9) auch jede Zahl, die sich mit einer Null endigt, von 2 und 5, jede Zahl, die sich mit zwo Nullen endigt, von 4 und 25, jede Zahl, die sich mit drey Nullen endigt, von 8 und 125 gemessen. Der Satz ist auch umgekehrt wahr: Jede Zahl,

die von 10, 100 oder 1000 gemessen wird, endigt sich mit einer, zwo oder drey Nullen.

B) Jede Zahl, wo die niedrigste Ziffer von 2 oder 5 gemessen wird, wird selbst von 2 oder 5 gemessen. Jede Zahl, wo die beyden niedrigsten Ziffern von 4 oder 25 gemessen werden, wird selbst von 4 oder 25 gemessen. Jede Zahl, wo die drey niedrigsten Ziffern von 8 oder 125 gemessen werden, wird selbst von 8 oder 125 gemessen. Denn weil die letzten Ziffern 6 und 5 der Zahlen 53896 und 7395 von 2 und 5 gemessen werden, 53896 = 53890 + 6, 7395 = 7390 + 5, und auch nach A) 53890 von 2 und 7390 von 5 gemessen wird, so wird auch nach (7) 53896 von 2, und 7395 von 5 gemessen. Weil die beyden letzten Ziffern 68 und 75 der Zahlen 47568 und 39475 von 4 und 25 gemessen werden, 47568 = 47500 + 68, 39475 = 39400 + 75, und auch nach A) 47500 von 4, und 39400 von 25 gemessen wird, so wird auch nach (7) 47568 von 4, und 39475 von 25 gemessen. Eben so sieht man ein, daß, weil 296 von 8, und 375 von 125 gemessen wird, auch 774296 von 8, und 391375 von 125 gemessen werden müsse. Der Satz ist auch umgekehrt wahr: Bey jeder Zahl, die von 2 oder 5 gemessen wird, wird die niedrigste Ziffer auch von 2 oder 5 gemessen. Bey jeder Zahl, die von 4 oder 25 gemessen wird, werden auch die beyden niedrigsten Ziffern von 4 oder 25 gemessen; bey jeder Zahl, die von 8 oder 125 gemessen wird, werden auch die drey niedrigsten Ziffern von 8 oder 125 gemessen. Denn weil die Zahl 349472 von 8 gemessen wird, 349472 − 349000 = 472, und auch nach A) 349000 von 8 gemessen wird, so wird auch nach (8) 472 von 8 gemessen.

C) Jede vielziffrige Zahl ist gleich der Summe zwoer Zahlen, deren die eine von 9, mithin auch nach (9) von 3 gemessen wird, und die andere der Summe aller Ziffern, womit sie geschrieben wird, gleich ist. Denn die Zahl sey 78374, so ist

$$\begin{aligned}70000 &= 7.10000 = 7(9999+1) = 7.9999+7\\ 8000 &= 8.1000 = 8.(999+1) = 8.999+8\\ 300 &= 3.100 = 3.(99+1) = 3.99+3\\ 70 &= 7.10 = 7.(9+1) = 7.9+7\\ 4 &= 4 = 4 = 4\end{aligned}$$

Weil nun $7+8+3+7+4 = 29$, so ist auch, wenn man beyderseits addirt,

$$78374 = (7.9999+8.999+3.99+7.9)+29.$$

Nun wird jeder der Factoren 9999, 999, 99, 9 von 9 gemessen, also auch nach (9) die Producte 7.9999, 8.999, 3.99, 7.9, und also auch nach (7) ihre Summe $7.9999 + 8.999 + 3.99 + 7.9$, welches zu beweisen war. Wird also die Summe aller Ziffern, womit eine Zahl geschrieben wird, von 9 oder 3 gemessen, so wird auch die ganze Zahl von 9 oder 3 gemessen; und umgekehrt: Wenn eine Zahl von 9 oder 3 gemessen wird, so muß auch die Summe aller Ziffern, womit sie geschrieben wird, von 9 oder 3 gemessen werden.

D) Jede vielziffrige Zahl ist gleich der Summe zwoer Zahlen, deren die eine von 99, mithin auch von 33 und 11 gemessen wird, und die andere der Summe aller zweyziffrigen Zahlen gleich ist, die entstehen, wenn man in Gedanken von der Rechten nach der linken zu gehend die Zahl in Classen abtheilt, so daß jede Classe zwo Ziffern bekommt. Weil z. B. bey der Zahl 875392314 die Summe der Classen $14 + 23 + 39 + 75 + 8 = 159$ ist, so ist

$$875392314 = A + 159$$

wo A eine Zahl ist, die von 99 gemessen wird. Denn

$$\begin{aligned}800000000 &= 8.100000000 = 8.(99999999+1) = 8.99999999+8\\ 75000000 &= 75.1000000 = 75.(999999+1) = 75.999999+75\\ 390000 &= 39.10000 = 39.(9999+1) = 39.9999+39\\ 2300 &= 23.100 = 23.(99+1) = 23.99+23\\ 14 &= 14 = 14 = 14\end{aligned}$$

also

also, wenn man beyderseits addirt,

$87539231 4=(8.9999999+75.999999+39.9999+23.99)+159$

Nun wird jeder der mit lauter Neunen geschriebenen Factoren von 99 gemessen, also auch nach (9) alle in der Klammer stehende Producte, mithin auch nach (7) ihre Summe, welches zu beweisen war. Sucht man also in Gedanken die Summe der gedachten zweyziffrigen Zahlen, so wird, wenn diese Summe von 11, 33 oder 99 gemessen wird, auch die ganze Zahl von 11, 33 oder 99 gemessen; und umgekehrt: Wenn eine Zahl von 11, 33 oder 99 gemessen wird, so wird auch die gedachte Summe von 11, 33 oder 99 gemessen. Z. B. bey der Zahl 82204672 ist die Summe der zweyziffrigen Zahlen $72+46+20+82=220$, bey dieser wieder $20+2=22$, und da diese Zahl von 11 gemessen wird, so wird auch die ganze Zahl von 11 gemessen. Bey der Zahl 6296631 ist die Summe der gedachten zweyziffrigen Zahlen $31+66+29+6=132$, bey dieser wieder $32+1=33$, und da diese Zahl von 11 und 33 gemessen wird, so wird die ganze Zahl von 11 und 33 gemessen. Bey der Zahl 974035854 ist die Summe der gedachten zweyziffrigen Zahlen $54+58+03+74+9=198$, bey dieser wieder $98+1=99$, und da diese Zahl von 11, 33 und 99 gemessen wird, so wird die ganze Zahl auch von 11, 33 und 99 gemessen. Bey der Zahl 3474827013 2 ist die gedachte Summe 158, bey dieser wieder 59, und da diese Zahl weder von 11, noch von 33, noch von 99 gemessen wird, so wird auch die ganze Zahl nicht von 11, 33 oder 99 gemessen, und da 59, durch 11, 33, 99 dividirt, die Reste 4, 26, 59 übrig läßt, so läßt auch die ganze Zahl durch 11, 33, 99 dividirt die Reste 4, 26, 59 übrig.

E) Eben so wird bewiesen, daß jede vielziffrige Zahl der Summe zwoer Zahlen gleich ist, deren die eine von 999, mithin auch von 27, 37, 111 und 333 gemessen wird, und die andere der Summe aller dreyziffrigen Zahlen gleich ist,

die

die entstehen, wenn man in Gedanken von der Rechten nach der Linken zu gehend die Zahl in Classen abtheilt, so daß jede Classe drey Ziffern bekommt. Weil z. B. bey der Zahl 4726583072 die Summe der Classen 4+726+583+072 = 1385 ist, so ist

$$4726583072 = A + 1385$$

wo A eine Zahl ist, die von 999 gemessen wird. Sucht man also in Gedanken die Summe der gedachten dreyziffrigen Zahlen, so wird, wenn diese Summe von 27, 37, 111, 333 oder 999 gemessen wird, auch die ganze Zahl von 27, 37, 111, 333 oder 999 gemessen; und umgekehrt: Wenn eine Zahl von 27, 37, 111, 333 oder 999 gemessen wird, so wird auch diese Summe von 27, 37, 111, 333 oder 999 gemessen. Ob eine dreyziffrige Zahl von 111, 333 oder 999 gemessen werde oder nicht, ist augenblicklich zu übersehen. Ob eine dreyziffrige Zahl von 27 gemessen wird, kann man daran erkennen, wenn der Unterschied zwischen den beyden niedrigsten Ziffern und dem Achtfachen der höchsten Ziffer entweder 0 ist, oder von 27 gemessen wird. Weil z. B. bey der dreyziffrigen Zahl 324 der Unterschied zwischen 24 und 8.3 gleich 0 ist, so wird sie von 27 gemessen; eben so die dreyziffrigen Zahlen 567 und 918, weil die Unterschiede 27 und 54 zwischen 67 und 8.5 und zwischen 18 und 8.9 von 27 gemessen werden. Ob eine dreyziffrige Zahl von 37 gemessen wird, kann man daran erkennen, wenn der Unterschied zwischen den beyden niedrigsten Ziffern und dem 11fachen der höchsten entweder 0 ist, oder von 37 gemessen wird. So wird die dreyziffrige Zahl 703 von 37 gemessen, weil der Unterschied zwischen 03 und 11.7, welcher 74 ist, von 37 gemessen wird.

Bey der Zahl 1305 3663 findet man leicht in Gedanken, daß die Summe der gedachten dreyziffrigen Zahlen 729 sey. Diese Zahl wird von 27 gemessen, weil der Unterschied zwischen 29 und 8.7 von 27 gemessen wird, also wird auch die

die ganze Zahl 13053663 von 27 gemessen. Bey der Zahl 2533610436l2 ist die Summe der dreyziffrigen Zahlen 1269, bey dieser wieder 270. Diese Zahl wird von 27 gemessen, also wird auch die ganze Zahl von 27 gemessen. Bey der Zahl 17906678027 ist die Summe der dreyziffrigen Zahlen 1628, bey dieser wieder 629, und da der Unterschied zwischen 29 und 11,6 von 37 gemessen wird, so wird auch 629, und die ganze Zahl 17906678027 von 37 gemessen. Bey den Zahlen 7534149087, 302516847, 5311785897 findet man die Summen der dreyziffrigen Zahlen 777, 1665, 1998, oder, wenn man bey den beyden letzten Zahlen, welche vierziffrig sind, dasselbe Verfahren noch einmal anbringt, 777, 666, 999; es wird daher die erste Zahl 7534149078 von 111 und 37, die zweyte 302516847 von 333, 111 und 37, und die dritte 5311785897 von 999, 333, 111, 37 und 27 gemessen. Bey der Zahl 3409674218734 ist die gedachte Summe 2038, bey dieser wieder 40; da nun 40 von keiner der Zahlen 27, 37, 111, 333, 999 gemessen wird, sondern durch 27 dividirt den Rest 13, durch 37 dividirt den Rest 3, und durch 111, 333, 999 dividirt den Rest 40 übrig läßt, so wird auch die ganze Zahl 3409674218734 von keiner der Zahlen 27, 37, 111, 333, 999 gemessen werden, sondern durch 27 dividirt den Rest 13, durch 37 dividirt den Rest 3, und durch 111, 333, 999 dividirt den Rest 40 geben.

F) Verbindet man die angeführten Merkmale mit dem Satze, daß, wenn eine Zahl von zwo oder mehrern andern Größen gemessen wird, sie auch (14) von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Zahlen gemessen werde, so giebt es eine Menge Zahlen, von denen man ohne Schwierigkeit übersehen kann, ob sie in einer gegebenen vielziffrigen Zahl aufgehen. Man ist aus den angeführten Merkmalen gleich zu übersehen im Stande, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 30, 33, 36,

36, 37, 40, 44, 45, 50, 54, 55, 60 u. s. w. aufgeht. Denn wird eine Zahl von 2 und 3 gemessen, so wird sie auch von 6 gemessen, weil 6 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2 und 3 ist. Wird eine Zahl von 4 und 3, von 3 und 5, von 2 und 9 gemessen, so wird sie aus eben dem Grunde auch von 12, 15, 18 gemessen.

Anmerkung. Man kann noch mehrere solche Merkmale, wie die in C), D) und E) sind, angeben, wenn man bey einer vielziffrigen Zahl die Summe aller vierziffrigen, fünfziffrigen, sechsziffrigen Zahlen u. s. w. in Betrachtung zieht, die entstehen, wenn man die gegebene vielziffrige Zahl von der Rechten nach der Linken zugehend in Classen abtheilt, so daß jede Classe vier, fünf, sechs Ziffern u. s. w. enthält.

18. Aufgabe. Zu untersuchen, ob eine gegebene vielziffrige Zahl absolute Primzahl ist oder nicht, und im letzten Falle sie in Factoren zu zerlegen, die alle absolute Primzahlen größer als 1 sind.

Vorerinnerung.

Man hat noch kein Verfahren ausfindig gemacht, diese Aufgabe direct, oder ohne Hülfe der Tafeln aufzulösen. Man muß sich daher der Factorentafeln bedienen, worin alle Zahlen, die weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 ohne Rest dividirt werden können, von 1 an bis auf eine gewisse Gränze enthalten sind, und wo bey jeder Zahl angemerkt ist, ob sie eine Primzahl ist oder nicht, und im letzten Falle ihre Factoren, die alle absolute Primzahlen sind, angegeben sind. In dem zweyten Bande von Georg Vega's logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. Leipzig bey Weidmann 1797, Seite 1 bis 86, findet sich eine solche Tafel, die bis auf die Gränze 102000 geht. Darauf folgt, von Seite 88 bis 128, ein Verzeichniß aller absoluten Primzahlen von 102000 bis 400031, so daß man

also,

also, da die absoluten Primzahlen von 1 bis 102000 schon in der Factorentafel sich finden, ein Verzeichniß aller absoluten Primzahlen von 1 bis 400031 in dieser Tafel hat, welches also vollständiger ist, als das (3. Anmerk.) angeführte. Die Zahlen, welche durch 2, 3 oder 5 ohne Rest dividirt werden können, sind deswegen in der Tafel weggelassen, weil man diese leicht an den [17. B) C)] angeführten Merkmalen erkennen kann. Vermittelst dieser Tafeln wird also die Aufgabe so aufgelöst:

1) Ist die gegebene Zahl nicht durch 2 oder 3 oder 5 ohne Rest theilbar, so suche man sie in der Factorentafel auf, so wird man die verlangten Factoren angegeben finden.

2) Ist aber die gegebene Zahl durch eine oder mehrere der Zahlen 2, 3 und 5 theilbar, so dividire man sie so lange durch diese Zahlen, bis man endlich eine Zahl erhält, die nicht mehr durch 2, 3 oder 5 theilbar ist; diese suche man in der Tafel auf, so wird man sogleich finden, ob sie eine Primzahl ist, oder nicht; man setze in dem letzten Falle zu den in der Tafel angegebenen Factoren noch diejenigen hinzu, welche man anfangs wegdividirt hatte, und im ersten Falle zu der zuletzt herauskommenden Primzahl ebenfalls die wegdividirten Factoren.

1) Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 86333 und 97159. Da keine dieser Zahlen durch 2, 3 oder 5 getheilt werden kann, so suche man sie in der Tafel auf, und da findet man, daß

$$86333 = 13.29.229$$

und 97159 eine absolute Primzahl sey.

2) Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 1115632 und 2049184, so geht jede durch 2 auf, man dividire sie also so oft durch 2, als es angeht.

$$2)\underline{1115632}\quad 2)\underline{557816}\quad 2)\underline{278908}\quad 2)\underline{139454}\quad 69727$$

$$2)\underline{2049184}\quad 2)\underline{1024592}\quad 2)\underline{512296}\quad 2)\underline{256148}\quad 2)\underline{128074}\quad 64037$$

Da nach [17. B)] beyde gegebene Zahlen sich durch 8 ohne Rest dividiren lassen, so könnte man sie gleich durch 8 dividiren.

$$8)\underline{1115632}\quad 139454 \qquad 8)\underline{2049184}\quad 256148$$

Von diesen herauskommenden Quotienten läßt sich keiner durch 8, der letzte aber durch 4, und der erste blos durch 2 dividiren, man bekommt also

$$8)\underline{1115632}\quad 2)\underline{139454}\quad 69727 \qquad 8)\underline{2049184}\quad 4)\underline{256148}\quad 64037$$

Da die herauskommenden Quotienten nicht mehr durch 2, aber auch nicht durch 3 oder 5 theilbar sind, so suche man sie in der Tafel auf. Da man nun darin findet, daß 69727 $= 7.7.1423$ und 64037 eine absolute Primzahl ist, da ferner $8=2^3$ und $4=2^2$ ist, so hat man

$$1115632 = 2^3.2.7^2.1423 = 2^4.7^2.1423$$
$$2049184 = 2^3.2^2.64037 = 2^5.64037$$

3) Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 5160753 und 11868363, so geht keine dieser Zahlen durch 2, aber beyde durch 3 auf, man dividire also beyde so oft durch 3, als es angeht:

5160753

3) 5160753	3) 11868363
3) 1720251	3) 3956121
3) 573417	3) 1318707
3) 191139	3) 439569
63713	3) 146523
	48841

oder kürzer nach [17. C)]

9) 5160753	9) 11868363
9) 573417	9) 1318707
63713	3) 146523
	48841

Da die herauskommenden Quotienten nicht mehr durch 3, aber auch nicht durch 5 theilbar sind, so suche man sie in der Tafel auf, worin man findet, daß $63713 = 13.13.13.29$ und $48841 = 13.13.17.17$. Es ist also, weil $9 = 3^2$

$$5160753 = 3^2.3^2.13^3.29 = 3^4.13^3\,29 \text{ und}$$
$$11868363 = 3^2.3^2.3.13^2.17^2 = 3^5.13^2.17^2$$

4) Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 60870625 und 913484375, so geht keine dieser Zahlen durch 2 oder 3, aber beyde durch 5 auf, man dividire also beyde so oft durch 5, als es angeht:

5) 60870625	5) 913484375
5) 12174125	5) 182696875
5) 2434825	5) 36539375
5) 486965	5) 7307875
97393	5) 1461575
	5) 292315
	58463

oder

oder kürzer nach [17. B)] und nach [V. Kap. 9. B)]

$$125)\underline{60870625} \qquad 125)\underline{913484375}$$
$$5)\underline{486965} \qquad 125)\underline{7307875}$$
$$97393 \qquad 58463$$

Da die herauskommenden Quotienten nicht mehr durch 5 theilbar sind, so suche man sie in der Tafel auf, und man findet $97393 = 17.17.337$ und $58463 = 17.19.181$. Es ist also, weil $125 = 5^3$, und $25 = 5^2$

$$60870625 = 5^3.5.17^2.337 = 5^4.17^2.337$$
$$913484375 = 5^3.5^3.17.19.181 = 5^6.17.19.181$$

5) Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 33154704 und 299757024, so geht jede dieser Zahlen durch 2 auf, man dividire sie also so oft durch 2, als es angeht:

$$8)\underline{33154704} \qquad 8)\underline{299757024}$$
$$2)\underline{4144338} \qquad 4)\underline{37469628}$$
$$2072169 \qquad 9367407$$

Von diesen herauskommenden Quotienten geht keiner mehr durch 2, aber beyde durch 3 auf, man dividire sie also beyde so oft durch 3, als es angeht:

$$9)\underline{2072169} \qquad 9)\underline{9367407}$$
$$3)\underline{230241} \qquad 9)\underline{1040823}$$
$$76747 \qquad 3)\underline{115647}$$
$$38549$$

Von diesen herauskommenden Quotienten geht keiner mehr durch 3, aber auch keiner durch 5 auf, man suche sie also in der Tafel auf, so findet man, daß $76747 = 11.6977$ und $38549 = 7.5507$. Es ist also

$$33154704 = 2^3.2.3^2.3.11.6977 = 2^4.3^3.11.6977 \text{ und}$$
$$299757024 = 2^3.2^2.3^2.3^2 3.7.5507 = 2^5.3^5.7.5507.$$

6) Bey-

6) Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 161692875 und 58354425, so geht keine derselben durch 2, aber beyde durch 3 auf; man dividire sie also so oft durch 3, als es angeht:

$$9)\frac{161692875}{17965875} \qquad 9)\frac{58354425}{6483825}$$
$$3)\frac{17965875}{5988625} \qquad 9)\frac{6483825}{720425}$$

Von diesen herauskommenden Quotienten geht keiner mehr durch 3, beyde aber durch 5 auf; man dividire sie also so oft durch 5, als es angeht:

$$125)\frac{5988625}{47909} \qquad 25)\frac{720425}{28817}$$

Von diesen herauskommenden Quotienten geht keiner mehr durch 5 auf; man suche sie also in der Tafel, so findet man, daß 47909 = 23.2083 und 28817 eine absolute Primzahl sey; es ist demnach

$$161692875 = 3^2.3.5^3.23.2083 = 3^3.5^3.23.2083 \text{ und}$$
$$58354425 = 3^2.3^2.5^2.28817 = 3^4.5^2.28817$$

1) Zusatz. Endigt sich die gegebene Zahl mit einer oder mehrern Nullen, so zerfälle man blos die Zahl ohne die Nullen in ihre Factoren, und setze noch die sovielte Potenz von 2 und 5 zu den Factoren hinzu, als die Menge der weggelassenen Nullen beträgt. Z. B. Die gegebenen Zahlen seyen 8633300, 97159000, 331547040000, 913484375000000 so ist

$$\left.\begin{array}{l}86333 = 13.29.229\\ 97159 \text{ eine Primzahl}\end{array}\right\}\text{nach 1) Beyspiel,}$$
$$33154704 = 2^4.3^3.11.6977 \text{ nach 5) Beyspiel,}$$
$$913484375 = 5^6.17.19.181 \text{ nach 4) Beyspiel,}$$

 also

also auch

$$8633300 = 2^2.5^2.13.29.229$$
$$97159000 = 2^3.5^3.97159$$
$$331547040000 = 2^4.5^4.2^4.3^3.11.6977 = 2^8.3^3 5^4.11.6977$$
$$913484375000000 = 2^6.5^6.5^6.17.19.181 = 2^6.5^{12}.17.19.181$$

2) Zusatz. Käme eine Zahl vor, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5 theilbar ist, und welche die Gränze der Factorentafel, nicht aber die Gränze der Primzahlentafel überstiege, so suche man sie in der Primzahlentafel auf; findet sie sich daselbst, so ist sie eine Primzahl; findet sie sich aber nicht daselbst, so müßte man ihre Factoren durch Versuche finden, welcher Arbeit man sich um soviel lieber unterziehen wird, da man weiß, daß die Zahl sich in Factoren zerlegen läßt. Man kann sich auch dabey der in [17. D) E)] angegebenen Vortheile bedienen. Z. B. die Zahlen seyen 184957 und 351941, so geht keine derselben durch 2, 3 oder 5 auf, sie übersteigen die Gränze 102000 der Vegaischen Factorentafel, nicht aber die Gränze 400031 der Primzahlentafel; man suche sie also in letzterer auf, so findet man die erste Zahl 184957 in dem Primzahlenverzeichnisse, die zweyte Zahl 351941 aber nicht; man muß also von der letzten Zahl die Factoren durch Versuche bestimmen, und man findet, daß $351941 = 353.997$ sey.

3) Zusatz. Ueberstiege endlich eine durch 2, 3, 5 nicht theilbare Zahl auch die Gränze des Primzahlenverzeichnisses, und sollte man doch untersuchen, ob sie eine Primzahl sey, oder nicht, und im letzten Falle die Factoren von ihr angeben, so müßte man entweder eine größere Factoren- und Primzahlentafel gebrauchen, oder das Verlangte durch Versuchen zu bestimmen suchen, welches dann ungemein mühsam und beschwerlich ist, und doch vergeblich seyn kann, wenn die gegebene Zahl eine Primzahl ist. Es ist derowegen die angeführte Auflösung der Aufgabe allemal beschränkt; allein da man noch keine andere Auflösung kennt, so hat man, um den Feh-

Fehler der Beschränktheit zu vermindern, die Factorentafel so weit als möglich zu erweitern gesucht.

19. Lehrsatz. Es seyen A und B nicht absolute Primzahlen, sondern andere Zahlen, die in ihre Factoren, die alle absolute Primzahlen sind, nach (18) zerlegt sind.

I. Wenn jede unter den Factoren von B befindliche Primzahl auch unter den Factoren von A vorkommt, und zwar zu einer Potenz erhoben, die nicht niedriger ist, als die in B, so wird A von B gemessen.

II. Wenn eine unter den Factoren von B befindliche Primzahl nicht unter den Factoren von A vorkommt, so wird A nicht von B gemessen.

III. Wenn eine unter den Factoren von B befindliche Primzahl zwar unter den Factoren von A vorkommt, aber zu einer niedrigern Potenz erhoben als in B, so wird A nicht von B gemessen.

Beweis.

I. Es sey $A = 2^6.3^4.5^3.7.11^2.17$ und $B = 2^5.3^2.5^3.11^2.17$, so ist nach [VII. Kap. 8]

$$A = 2^6.3^4.5^3.7.11^2.17 = (2^5.2).(3^2.3^2).5^3.7.11^2.17,$$

und auch

$$(2^5.2).(3^2.3^2).5^3.7.11^2.17 = 2^5.2.3^2.3^2.5^3.7.11^2.17$$
$$= 2.3^2.7.2^5.3^2.5^3.11^2.17 = (2.3^2.7).(2^5.3^2.5^3.11^2.17)$$
$$= (2.3^2.7).B$$ nach [III. Kap. 12. 2) Zus. und 14.]

also wird A von B gemessen.

II. Es sey $A = 2^7.3^5.5.7^2.19$ und $B = 2^3.3^5.5.7.31^2$, so wird B von 31^2 gemessen. Würde nun auch A von B gemessen, so würde nach (9) auch A von 31^2 gemessen, welches nach [16. 6) Zus.] unmöglich ist; also wird A nicht von B gemessen.

III. Es sey $A = 2^6 . 3^4 . 5^3 . 11$ und $B = 2^4 . 3^7 . 5 . 11$, so wird B von 3^7 gemessen. Würde nun A von B gemessen, so würde nach (9) auch A von 3^7 gemessen, welches nach [16. 7) Zus.] unmöglich ist, also wird A nicht von B gemessen.

20. Aufgabe. Die größte ganze Zahl zu finden, von der mehrere gegebene ganze Zahlen, die nicht absolute Primzahlen sind, gemessen werden.

Auflösung.

Man zerfälle nach (18) alle gegebenen Zahlen in ihre Factoren, die alle absolute Primzahlen sind. Ein Product aus den niedrigsten vorkommenden Potenzen aller der Primzahlen, die in allen gegebenen Zahlen zugleich als Factoren vorkommen, wird die verlangte Zahl seyn. Gäbe es nur eine einzige Primzahl, die in allen Zahlen zugleich als Factor vorkommt, so würde die niedrigste vorkommende Potenz dieser Primzahl die verlangte Zahl seyn. Gäbe es endlich gar keine Primzahl, die in allen gegebenen Zahlen zugleich als Factor vorkäme, so wären die Zahlen relative Primzahlen, und es gäbe keine ganze Zahl größer als 1, von welcher alle Zahlen gemessen würden.

1) Beyspiel. Die Zahlen seyen

720, 960, 1680, 1800, 2400, 2520, 3000, 3240,

so ist

$$\begin{aligned} 720 &= 2^4 . 3^2 . 5 \\ 960 &= 2^6 . 3 . 5 \\ 1680 &= 2^4 . 3 . 5 . 7 \\ 1800 &= 2^3 . 3^2 . 5^2 \\ 2400 &= 2^5 . 3 . 5^2 \\ 2520 &= 2^3 . 3^2 . 5 . 7 \\ 3000 &= 2^3 . 3 . 5^3 \\ 3240 &= 2^3 . 3^4 . 5 \end{aligned}$$

Da nun blos die Primzahlen 2, 3, 5 in allen Zahlen zugleich als Factoren vorkommen, und 2^3 die niedrigste vorkommende Po-

Potenz von 2, 3^1 oder 3 die niedrigste vorkommende Potenz von 3, und 5^1 oder 5 die niedrigste vorkommende Potenz von 5 ist, so hat man

$$2^3 . 3^1 . 5^1 = 8.3.5 = 120$$

als die größte ganze Zahl, von welcher alle gegebene ganze Zahlen gemessen werden.

2) Beyspiel. Die Zahlen seyen

36, 54, 63, 90, 117, 135, 189, 225,

so ist

$$36 = 2^2 . 3^2$$
$$54 = 2 . 3^3$$
$$63 = 3^2 . 7$$
$$90 = 2 . 3^2 . 5$$
$$117 = 3^2 . 13$$
$$135 = 3^3 . 5$$
$$189 = 3^3 . 7$$
$$225 = 3^2 . 5^2$$

Da nun blos die Primzahl 3 in allen Zahlen zugleich als Factor vorkommt, und 3^2 die niedrigste vorkommende Potenz von 3 ist, so ist $3^2 = 9$ die gesuchte Zahl.

3) Beyspiel. Die Zahlen seyen

24, 30, 42, 63, 94, 111, 160,

so ist

$$24 = 2^3 . 3$$
$$30 = 2 . 3 . 5$$
$$42 = 2 \; 3 . 7$$
$$63 = 3^2 . 7$$
$$94 = 2 . 47$$
$$111 = 3 . 37$$
$$160 = 2^5 . 5$$

Da nun keine Primzahl zugleich in allen Zahlen als Factor vorkommt, so sind die gegebenen Zahlen relative Primzahlen, und

und also 1 die größte ganze Zahl, von welcher alle gemessen werden.

Beweis.

Daß im ersten Beyspiele das Product $2^3 . 3 . 5$ ein gemeinschaftliches Maaß aller gegebenen Zahlen ist, folgt aus (19. I), weil die Zahlen 2, 3, 5 in allen gegebenen Zahlen als Factoren vorkommen, und zwar zu Potenzen erhoben, die nicht niedriger sind als in dem Producte $2^3 . 3 . 5$. Daß aber dieses Product die größte ganze Zahl ist, von der alle gegebene Zahlen gemessen werden, sieht man so ein: Jede ganze Zahl, die ein gemeinschaftliches Maaß aller gegebenen Zahlen ist, in ihre Factoren, die alle Primzahlen sind, zerfällt, kann unter den Factoren keine andern Primzahlen enthalten, als 2, 3, 5, denn sonst würden nach (19. II) nicht alle Zahlen von ihr gemessen; sie kann aber auch keine höhern Potenzen dieser Primzahlen unter den Factoren enthalten, als in dem Producte $2^3 . 3 . 5$ vorkommen, denn sonst würden nach [19. III)] nicht alle gegebene Zahlen von ihr gemessen; also wird nach [19. I) das Product $2^3 . 3 . 5$ selbst von jeder dieser Zahlen gemessen, kann also nach (2) unmöglich kleiner als eine dieser Zahlen seyn.

1) Zusatz. Aus dem angeführten Beweise erhellet, daß die größte ganze Zahl, welche ein gemeinschaftliches Maaß von mehrern gegebenen Zahlen ist, von jeder andern ganzen Zahl, die ebenfalls ein gemeinschaftliches Maaß dieser Zahlen ist, gemessen werden müsse. Ist demnach die ganze Zahl A ein gemeinschaftliches Maaß mehrerer ganzer Zahlen B, C, D, E, und die Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in B, C, D, E enthalten ist, relative Primzahlen, so ist A die größte ganze Zahl, welche ein gemeinschaftliches Maaß von B, C, D, E ist. Denn wäre A nicht die größte Zahl, so sey es M, es würde also M von A gemessen, und es könnten demnach [9. 1) Zus.] die Zahlen, welche anzeigen, wievielmal A in B,

B, C, D, E enthalten ist, nicht relative Primzahlen seyn, wider die Voraussetzung.

2) Zusatz. Wäre unter den gegebenen Zahlen eine einzige absolute Primzahl, so sind sie (5. Zus.) auch relative Primzahlen, ausgenommen wenn die gedachte absolute Primzahl größer als 1 und zugleich ein gemeinschaftliches Maaß aller übrigen ist. In diesem Falle ist diese gedachte absolute Primzahl selbst die größte ganze Zahl, von welcher alle gegebene gemessen werden, weil nach (2) jede Größe auch sich selbst mißt, und eine Größe nicht kleiner als ein Maaß von ihr seyn kann.

21. Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von mehrern gegebenen ganzen Zahlen zu finden.

Auflösung.

Man zerfälle nach (18) alle gegebenen Zahlen, die nicht selbst absolute Primzahlen sind, in ihre Factoren, die alle absolute Primzahlen sind. Ein Product aus den höchsten vorkommenden Potenzen aller vorkommenden Primzahlen wird das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache seyn.

1) Beyspiel. Die gegebenen ganzen Zahlen seyen

8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 20, 23, 35,

so ist

$$\begin{aligned}
8 &= 2^3 \\
9 &= 3^2 \\
10 &= 2.5 \\
11 &= 11 \\
12 &= 2^2.3 \\
15 &= 3.5 \\
16 &= 2^4 \\
20 &= 2^2.5 \\
23 &= 23 \\
35 &= 5.7
\end{aligned}$$

Da

Da nun blos die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 23 vorkommen, und 2^4 die höchste vorkommende Potenz von 2, 3^2 die höchste vorkommende Potenz von 3, und $5^1, 7^1, 11^1, 23^1$ oder 5, 7, 11, 23 die höchsten vorkommenden Potenzen von den Zahlen 5, 7, 11, 23 sind, so ist $2^4 . 3^2 . 5 . 7 . 11 . 23 = 1275120$ das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

2) Beyspiel. Die gegebenen ganzen Zahlen seyen

27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50,

so ist

$$27 = 3^3 \qquad 40 = 2^3.5$$
$$28 = 2^2.7 \qquad 42 = 2.3.7$$
$$30 = 2.3.5 \qquad 45 = 3^2.5$$
$$32 = 2^5 \qquad 48 = 2^4.3$$
$$35 = 5.7 \qquad 49 = 7^2$$
$$36 = 2^2.3^2 \qquad 50 = 2.5^2$$

also $2^5.3^3.5^2.7^2 = 1058400$ das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

3) Beyspiel. Die gegebenen ganzen Zahlen seyen

54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81, 84, 90, 91, 96, 99,

so ist

$$54 = 2.3^3 \qquad 70 = 2.5.7 \qquad 84 = 2^2.3.7$$
$$56 = 2^3.7 \qquad 72 = 2^3.3^2 \qquad 90 = 2.3^2.5$$
$$60 = 2^2.3.5 \qquad 75 = 3.5^2 \qquad 91 = 7.13$$
$$63 = 3^2.7 \qquad 80 = 2^4.5 \qquad 96 = 2^5.3$$
$$64 = 2^6 \qquad 81 = 3^4 \qquad 99 = 3^2.11$$

also $2^6.3^4.5^2.7.11.13 = 129729600$ das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beweis.

Daß im ersten Beyspiele das Product $2^4.3^2.5.7.11.23$ ein gemeinschaftliches Vielfaches aller gegebenen Zahlen ist, folgt aus 19. I), weil keine andern Zahlen als 2, 3, 5, 7, 11, 23 in allen gegebenen Zahlen als Factoren vorkommen, und

und zwar zu Potenzen erhoben, die nicht höher sind, als in dem Producte $2^4.3^2.5.7.11.23$. Daß aber dieses Product das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller gegebenen Zahlen ist, sieht man so ein: Jedes gemeinschaftliche Vielfache aller gegebenen Zahlen, in seine Factoren, die alle Primzahlen sind, zerfällt, muß alle die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 23 unter seinen Factoren enthalten, denn sonst würde es nach [19. II] nicht von allen Zahlen gemessen; es kann aber auch keine niedrigern Potenzen dieser Primzahlen unter den Factoren enthalten, als in dem Producte $2^4.3^2.5.7.11.23$ vorkommen, denn sonst würde nach (19. III) es nicht von allen gegebenen Zahlen gemessen; also wird nach [19. I) jedes gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen von dem Producte $2^4.3^2.5.7.11.23$ gemessen, kann also unmöglich kleiner als gedachtes Product seyn.

Anmerkung. So leicht auch die angeführten Auflösungen der Aufgaben (20) und (21) sind, so sind sie doch nicht direct und unbeschränkt, indem sie beyde auf der gegebenen Auflösung der Aufgabe (18) beruhen, welche, da sie sich auf den Gebrauch der Factorentafeln gründet, weder direct noch [18. 3) Zus.] unbeschränkt ist. Durch Hülfe der folgenden Aufgabe ist man im Stande, sowohl die Aufgabe in (20) als auch die in (21) direct und allgemein aufzulösen.

22. Aufgabe. Die größte ganze Zahl, von welcher zwo verschiedene gegebene ganze Zahlen a und b gemessen werden, direct und allgemein zu finden.

Auflösung.

Die größere der beyden gegebenen Zahlen sey a. Man dividire a durch b, und wenn ein Rest übrig bleibt, b durch diesen Rest, und wenn auch hier ein Rest bleibt, den ersten Rest durch diesen zweyten, und so dividire man allemal, wenn ein Rest bleibt, den Divisor durch diesen Rest, bis einmal die Division aufgeht. Der letzte Divisor, welcher keinen

nen Rest übrig gelassen hatte, und r heißen mag, wird die verlangte Zahl seyn.

Beyspiel. Die beyden gegebenen Zahlen seyen 269087 und 43134, mithin a = 269087 und b = 43134.

```
43134|269087|6
     |258804|
     ------
       10283|43134|4
            |41132|
            -----
             2002|10283|5
                 |10010|
                 -----
   ⊙              273|2002|7
                      1911|
                      ----
                        91|273|3
                          |273|
                          ---
                            0
```

so ist r oder 91 die größte ganze Zahl, welche ein gemeinschaftliches Maaß von a oder 269087 und b oder 43134 ist.

Beweis.

I. Daß von denen in der Rechnung ⊙ anzustellenden Divisionen eine einmal aufgehen müsse, erhellet daraus, daß die Reste immer kleiner und kleiner werden, und doch ganze Zahlen bleiben. Gienge also die Division nicht eher auf, so käme man einmal auf den Rest 1, der gewiß in jeder ganzen Zahl aufgeht.

II. Aus denen in der Rechnung ⊙ angestellten Divisionen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 269087 &= 10283 + 6 . 43134 \\ 43134 &= 2002 + 4 . 10283 \\ 10283 &= 273 + 5 . 2002 \\ 2002 &= 91 + 7 . 273 \\ 273 &= 0 + 3 . 91 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

und

und umgekehrt:

$$
\begin{array}{rcll}
10283 & = & 269087 - 6.43134 & \\
2002 & = & 43134 - 4.10283 & \\
273 & = & 10283 - 5.2002 & \quad (B) \\
91 & = & 2002 - 7.273 & \\
0 & = & 273 - 3.91 &
\end{array}
$$

Man nenne die beyden Zahlen a und b, nebst denen in ⊙ als Reste herausgekommenen Zahlen der Kürze wegen Divisionszahlen, so sind diese in gegenwärtigem Beyspiele nach der Reihe

269087, 43134, 10283, 2002, 273, 91, 0

Aus den Gleichungen (A) erhellet, daß von jeden drey zunächst auf einander folgenden Divisionszahlen, z. B.

10283, 2002, 273

die erste 10283 allemal herauskommt, wenn man zu der letzten 273 ein Vielfaches der mittlern 5.2002 addirt. Ist also irgend eine ganze Zahl ein gemeinschaftliches Maaß von der letztern 273 und mittlern Divisionszahl 2002, so ist sie nach (9) auch ein Maaß von dem Vielsachen der mittlern 5.2002, mithin nach (7) auch von der erstern 10283. Umgekehrt erhellet aus den Gleichungen (B), daß die letztere Divisionszahl 273 allemal herauskommt, wenn man von der erstern 10283 ein Vielfaches der mittlern 5.2002 abzieht. Ist also irgend eine ganze Zahl ein gemeinschaftliches Maaß von der erstern 10283 und mittlern Divisionszahl 2002, so ist sie nach (9) auch ein Maaß von dem Vielfachen der mittlern 5.2002, also auch nach (8) von der letztern 273. Ist also eine ganze Zahl ein gemeinschaftliches Maaß von zwo zunächst neben einander stehenden Divisionszahlen, so wird sowohl die folgende als auch vorhergehende Divisionszahl von eben dieser ganzen Zahl gemessen. Aus wiederholter Anwendung dieses Schlusses ergiebt sich, daß, wenn zwo zunächst auf einander folgende Divisionszahlen von einer ganzen Zahl gemessen

messen werden, diese ganze Zahl ein gemeinschaftliches Maaß aller Divisionszahlen seyn müsse. Nun wird von der vorletzten Divisionszahl 91 sowohl sie selbst, als auch (wie die Rechnung ⊙ ausweist) die vorhergehende vorvorletzte Divisionszahl 273 gemessen; also ist 91 ein gemeinschaftliches Maaß aller Divisionszahlen, mithin auch der beyden gegebenen ganzen Zahlen a oder 269087 und b oder 43134, und jede ganze Zahl, die ein gemeinschaftliches Maaß von zwo neben einander stehenden Divisionszahlen ist, muß auch ein Maaß von 91, und demnach nicht größer als 91 seyn. Es ist demnach 91 das größte gemeinschaftliche Maaß von jeden zwo zunächst neben einander stehenden Divisionszahlen, also auch von a oder 269087 und b oder 43134, das in ganzen Zahlen möglich ist.

1) Zusatz. Dividirt man also beyde gegebene Zahlen a und b durch r, so müssen beyde Divisionen aufgehen.

```
91) 269087 | 2957 = α        91) 43134 | 474 = β
    182... |                     364.. |
    ----                         ---
     870                          673
     819..                        637.
     ----                         ---
      518                          364
      455.                         364
      ---                          ---
       637                         000
       637
       ---
       000
```

und die herauskommenden Quotienten 2957 und 474, die α und β heißen mögen, sind nach [13. 1) Zus.] relative Primzahlen.

2) Zusatz. Da $a:r = \alpha$, $b:r = \beta$, so ist umgekehrt $a = \alpha . r$, $b = \beta . r$, mithin nach [IIII. Kap. 5. 3) Zus.]

$$\beta.(\alpha.r) = \alpha.(\beta.r)$$

oder $\beta . a = \alpha . b$

und

und dieses Product ist, weil α und β relative Primzahlen sind, nach (14. Zus.) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b. Soll man also von zwo gegebenen ganzen Zahlen a und b das kleinste gemeinschaftliche Vielfache direct und allgemein finden, so mache man mit ihnen die Rechnung ⊙, dividire eine der gegebenen Zahlen durch die dadurch gefundene Zahl r, so muß die Division aufgehen, und der herauskommende Quotient mit der andern gegebenen Zahl multiplicirt, giebt das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Von 269087 und 43134 ist also

$$474 . 269087 = 2957 . 43134 = 127547238$$

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

3) Zusatz. Sind die beyden gegebenen Zahlen a und b relative Primzahlen, so ist $r = 1$, und umgekehrt, wenn $r = 1$ ist, so sind a und b relative Primzahlen. In diesem Falle ist also $\alpha = a$, $\beta = b$, und nach 2) Zus. ihr Product a.b ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. Es erhellet dies auch schon aus (14. Zus.)

4) Zusatz. Nach II des Beweises ist r ein gemeinschaftliches Maaß aller Divisionszahlen. Wievielmal r oder hier 91 in jeder Divisionszahl enthalten sey, läßt sich, ohne neue Divisionen vorzunehmen, durch folgende Schlüsse bestimmen:

Es ist

$$1) \quad 0 = 0.91$$
$$2) \quad 91 = 1.91$$

und nach der letzten Gleichung unter (A) in II des Beweises

$$3) \quad 273 = 3.91$$

Ferner ist nach der vorletzten oder 4ten Gleichung unter (A)

$$2002 = 91 + 7.273$$

Mul-

Multiplicirt man also die Gleichung 3) mit 7, so findet sich nach (IIII. Kap. 5. 2) Zus.)

$$7.273 = (7.3).91 = 21.91$$

und diese Gleichung zu der Gleichung 2) addirt giebt

$$91 + 7.273 = 1.91 + 21.91$$

oder nach (IIII. Kap. 5)

$$4)\ 2002 = 22.91$$

Ferner ist nach der vorvorletzten oder dritten Gleichung unter (A)

$$10283 = 273 + 5.2002$$

Multiplicirt man also die Gleichung 4) mit 5, so findet sich nach (IIII. Kap. 5. 2) Zus.).

$$5.2002 = (5.22).91 = 110.91$$

und diese Gleichung zu der Gleichung 3) addirt giebt

$$273 + 5.2002 = 3.91 + 110.91$$

oder nach [IIII Kap. 5].

$$5)\ 10283 = 113.91$$

Auf diese Art kann man in Schlüssen fortfahren, und so findet sich ferner

$$6)\ 43134 = 474.91$$
$$7)\ 269087 = 2957.91$$

Kürzer kann man diese Schlüsse so darstellen:

$$\begin{array}{rcl}
0 = 0.91 & & \\
\underline{3.91 = (3.1).91} \ldots & 3 & \ldots\ldots 91 = 1.91 \\
273 = 3.91 \ldots\ldots & 7 & \ldots \underline{7.273 = (7.3).91} \\
\underline{5.2002 = (5.22).91} \ldots & 5 & \ldots\ldots 2002 = 22.91 \\
10283 = 113.91 \ldots & 4 & \ldots 4.\underline{10283 = (4.113).91} \\
\underline{6.43134 = (6.474).91} \ldots & 6 & \ldots 43134 = 474.91 \\
269087 = 2957.91 & &
\end{array}$$

Näm-

Nämlich die beyden obersten Gleichungen zur Linken und Rechten hat man gleich anfangs ohne Rechnung und Beweis; die in der Mitte stehenden Zahlen sind die in ⊙ herausgekommenen Quotienten in umgekehrter Ordnung; von jedem Paare in einer Horizontallinie stehender Gleichungen entsteht allemal diejenige, welche zunächst über einem Horizontalstriche steht, aus der andern durch Multiplication mit der dazwischen in der Mitte stehenden Zahl, mit Zuziehung von (IIII. Kap. 5. 2) Zus.) und jede zunächst unter einem Horizontalstriche stehende Gleichung entsteht durch Addition der beyden darüberstehenden Gleichungen mit Zuziehung der in II des Beweises aufgestellten Gleichungen (A) und (IIII. Kap. 5). Man findet oder schreibt also zuerst die erste oder oberste Gleichung zur Linken, dann die erste oder oberste Gleichung zur Rechten, dann die zweyte und dritte Gleichung zur Linken, dann die zweyte und dritte Gleichung zur Rechten, hierauf die vierte und fünfte Gleichung zur Linken, dann die vierte und fünfte Gleichung zur Rechten und so fort, und bestimmt dadurch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & 0.91 \\ 91 & = & 1.91 \\ 273 & = & 3.91 \\ 2002 & = & 22.91 \\ 10283 & = & 113.91 \\ 43134 & = & 474.91 \\ 269087 & = & 2957.91 \end{array}\right\} \quad (C)$$

und es erhellet, daß man die Zahlen, welche anzeigen, wievielmal r oder 91 in allen Divisionszahlen enthalten ist, sehr leicht durch folgende Rechnung bestimmen kann:

$$☽\ \frac{6,\quad 4,\quad 5,\quad 7,\quad 3,}{2957,\ 474,\ 113,\ 22,\ 3,\ 1,\ 0,}$$

deren Erklärung folgende ist: Die über dem Striche stehenden Zahlen sind die in ⊙ herausgekommenen Quotienten;

die

die Zahlen unter dem Striche bestimmen sich nach und nach eine aus der andern von der Rechten zur Linken, und zwar folgendergestalt: Die beyden ersten Zahlen am weitesten zur Rechten sind allemal 1, 0, und jede folgende Zahl darin wird so gefunden, daß man zu dem Producte aus der zuletzt gefundenen vorhergehenden Zahl in die gerade darüber in der obern Horizontalreihe befindliche, die noch weiter in der untern Horizontalreihe vorhergehende oder zur Rechten stehende hinzuaddirt. Aus den ersten beyden bekannten Gliedern der untern Reihe findet man also die andern auf folgende Art:

$$\begin{aligned} 3.1 &+ 0 = 3 \\ 7.3 &+ 1 = 22 \\ 5.22 &+ 3 = 113 \qquad (D) \\ 4.113 &+ 22 = 474 \\ 6.474 &+ 113 = 2957 \end{aligned}$$

Unter dem Striche in D stehen die gesuchten Zahlen nach der Reihe, und die beyden letzten am weitesten zur Linken stehenden Zahlen davon sind die im 1) Zusatze gefundenen Quotienten α und β; man kann also, um diese zu finden, statt der im 1) Zusatze gemachten Divisionen die Rechnung D verfertigen. Weil ferner, wie aus II des Beweises erhellet, die Zahl r nicht nur das größte gemeinschaftliche Maaß von a und b, sondern überhaupt von jeden zwo zunächst neben einander stehenden Divisionszahlen ist, so sind auch nach [13. 1) Zus.] nicht nur α und β, sondern auch jede zwo zunächst neben einander stehende Zahlen in der untern Reihe von D relative Primzahlen, und man ist aus denselben das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von jeden zwo neben einander stehenden Divisionszahlen zu bestimmen im Stande; aus eben den Gründen nämlich, aus welchen im 2) Zusatze gezeigt wurde, daß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 269087 und 43134 gleich 474.269087 = 2957.43134 = 127547238 seyn müsse, läßt sich ferner darthun, daß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von

43134 und	10283	113.43134 =	474.10283 =	4874142
10283 und	2002	22.10283 =	113.2002 =	226226
2002 und	273	3. 2092 =	22. 273 =	6006
273 und	91	1. 273 =	3. 91 =	273
91 und	0	0. 91 =	1. 0 =	0

seyn müsse.

5) Zusatz. Jede Divisionszahl läßt sich als Unterschied zwoer Zahlen ausdrücken, wovon die eine ein Vielfaches von a, und die andere ein Vielfaches von b ist. Denn da hier $a = 269087$ und $b = 43134$ ist, so ist offenbar

$$1)\ 269087 = 1.a - 0.b$$

$$2)\ 43134 = 1.b - 0.a$$

und nach der ersten von den Gleichungen (B) in II des Beweises

$$10283 = 269087 - 6.43134$$

oder

$$3)\ 10283 = 1.a - 6.b$$

also die Sache für die drey ersten Divisionszahlen erwiesen.

Nun ist ferner nach der zweyten Gleichung unter (B)

$$2002 = 43134 - 4.10283$$

Multiplicirt man also die Gleichung 3) mit 4, so findet sich nach (IIII. Kap. 5. 1) und 2) Zus.)

$$4.10283 = (4.1).a - (4.6).b = 4.a - 24.b$$

und diese Gleichung von der Gleichung 2) abgezogen giebt

$$43134 - 4.10283 = (1.b - 0.a) - (4.a - 24.b)$$

oder nach (III. Kap. 8. II. und IIII. Kap. 5)

$$4)\ 2002 = 25.b - 4.a$$

Weiter ist nach der dritten Gleichung unter (B)

$$273 = 10283 - 5.2002$$

Multiplicirt man also die Gleichung 4) mit 5, so findet sich nach [IIII. Kap. 5. 1) und 2) Zus.]

$$5.2002=(5.25).b-(5.4).a=125.b-20.a$$

und diese Gleichung von der Gleichung 3) abgezogen giebt

$$10283-5.2002=(1.a-6.b)-(125.b-20.a)$$

oder nach [III. Kap. 8. II und IIII. Kap. 5]

$$5)\ 273=21.a-131.b$$

Auf diese Art kann man in Schlüssen fortfahren, und so findet sich ferner

$$6)\ 91=942.b-151.a$$

$$7)\ 0=474.a-2957.b$$

Man kann diese Schlüsse auf ähnliche Art wie im vorigen Zusatze kürzer so darstellen:

269087 = 1.a — 0.b		
6.43134 = (6.1).b -- (6.0).a ..	6	... 43134 = 1.b — 0.a
10283 = 1.a — 6.b ...	4	.4.10283 = (4.1) a - (4.6).b
5.2002 = (5.25).b -- (5.4).a ..	5	.. 2002 = 25.b — 4.a
273 = 21.a — 131.b	7	.7.273 = (7.21).a - (7.131).b
3.91 = (3 942).b -- (3.151).a .	3	.. 91 = 942.b — 151.a
0 = 474.a — 2957.b		

Nämlich die beyden obersten Gleichungen zur Linken und Rechten hat man gleich anfangs ohne Rechnung und Beweis; die in der Mitte stehenden Zahlen sind die in ⊙ nach der Ordnung herausgekommenen Quotienten, und von jedem Paare in einer Horizontallinie stehender Gleichungen entsteht allemal diejenige, welche zunächst über einem Horizontalstriche steht, aus der andern durch Multiplication mit der dazwischen in der Mitte stehenden Zahl, mit Zuziehung von (IIII. Kap. 5. 1) und 2) Zus.) und jede zunächst unter einem Horizontalstriche stehende Gleichung entsteht durch Subtraction der beyden darüberstehenden Gleichungen mit Zuziehung der in II des Beweises aufgestellten Gleichungen (B) und (III. Kap. 8. II und IIII. Kap. 5). Es ist demnach

$$
\begin{aligned}
269087 &= 1.a - 0.b \\
43134 &= 1.b - 0.a \\
10283 &= 1.a - 6.b \\
2002 &= 25.b - 4.a \qquad (E) \\
273 &= 21.a - 131.b \\
91 &= 942.b - 151.a \\
0 &= 474.a - 2957.b
\end{aligned}
$$

also die Minuenden und Subtrahenden abwechselnd Vielfache a und b, und es erhellet, daß man sowohl die Zahlen

1, 0, 1, 4, 21, 151, 474,

mit welchen a in obigen Gleichungen multiplicirt vorkommt, als auch die Zahlen

0, 1, 6, 25, 131, 942, 2957,

mit welchen b in diesen Gleichungen multiplicirt vorkommt, sehr leicht durch folgende Rechnung bestimmen kann:

♂		6,	4,	5,	7,	3,
1.	0	1.	4	21.	151	474.
0	1.	6	25.	131	942.	2957

Die Zahlen in der obern Reihe sind hier die in ⊙ gefundenen Quotienten; die Zahlen in der mittlern und untern Reihe bestimmen sich nach und nach eine aus der andern von der Linken zur Rechten folgendergestalt: Die beyden ersten Zahlen am weitesten zur Linken sind allemal in der mittlern Reihe 1, 0, in der untern aber 0, 1, und jede folgende Zahl sowohl der mittlern als untern Reihe wird gefunden, indem man zu dem Producte aus der zuletzt gefundenen vorhergehenden in die gerade darüber in der obern Horizontalreihe befindliche Zahl die noch weiter vorhergehende oder zur Linken stehende hinzuaddirt. Aus den beyden ersten bekannten Gliedern der mittlern und untern Reihe findet man also die andern auf folgende Art:

$$\begin{array}{lll}
6.0 + 1 = 1 & & 6.1 + 0 = 6 \\
4.1 + 0 = 4 & & 4.6 + 1 = 25 \\
5.4 + 1 = 21 & (F) & 5.25 + 6 = 131 \quad (G) \\
7.21 + 4 = 151 & & 7.131 + 25 = 942 \\
3.151 + 21 = 474 & & 3.942 + 131 = 2957
\end{array}$$

Die Zahlen in der mittlern Reihe sind diejenigen, mit welchen a, und die in der untern, mit welchen b in den vorigen Gleichungen (E) multiplicirt vorkommt. Gerade über einander in der mittlern und untern Reihe stehende Zahlen kommen allemal in einerley Gleichung vor, und diejenige, bey welcher der Punkt steht, welcher allemal bey der ersten Zahl der mittlern Reihe am weitesten zur Linken, und von da an abwechselnd oben und unten gesetzt wird) ist allemal ein Factor des Minuends.

Man kann aber auch die sämmtlichen Gleichungen unter (E) durch r, oder hier 91, dividiren, und bekommt mit Zuziehung der Gleichungen (C) im vorigen Zusatze, und nach [V. Kap. 11. 1) Zus. und 2) Zus.] da $a:r = \alpha$ und $b:r = \beta$, die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
2957 & = & 1.\alpha - 0.\beta \\
474 & = & 1.\beta - 0.\alpha \\
113 & = & 1.\alpha - 6.\beta \\
22 & = & 25.\beta - 4.\alpha \quad (H) \\
3 & = & 21.\alpha - 131.\beta \\
1 & = & 942.\beta - 151.\alpha \\
0 & = & 474.\alpha - 2957.\beta
\end{array}$$

6) Zusatz. Jede zwo in der mittlern Horizontalreihe der Rechnung ♂ neben einander stehende Zahlen, z. B. 4, 21, bilden mit denen in der untern Horizontalreihe gerade darunter stehenden 25, 131 allemal ein Zahlenviereck

$$\begin{array}{cc}
4 & 21. \\
25. & 131
\end{array}$$

und in jedem solchen Zahlenvierecke ist das eine Paar einander quer gegenüber stehender Zahlen, hier 21 und 25, punktirt, das

das andere aber nicht. Die beyden ersten am weitesten zur linken stehenden Zahlenvierecke

1. 0 0 1.
0 1. und 1. 4

haben offenbar allemal die Eigenschaft, daß das Product der einander darin quer gegenüberstehenden punktirten Zahlen um 1 größer ist, als das Product der beyden andern, einander ebenfalls quer gegenüberstehenden, aber nicht punktirten Zahlen. Läßt sich nun allgemein zeigen, daß, wenn einem Zahlenvierecke, z. B. dem zuerst angeführten

4 21.
25. 131

diese Eigenschaft zukommt, sie auch dem zunächst zur Rechten folgenden

21. 151
131 942.

zukommen müsse, so ist bewiesen, daß alle solche Zahlenvierecke diese Eigenschaft haben. Dies kann aber so geschehen: Hat das erstere Zahlenviereck diese Eigenschaft, so ist

$$21.25 - 4.131 = 1$$

Nun ändert sich nach (III. Kap. 7. 3) Zus. III) eine Differenz nicht, wenn man sowohl Minuend als Subtrahend um gleichviel vermehrt. Vermehrt man also bey dieser Differenz sowohl Minuend als auch Subtrahend um das Product 7. 21. 131, nämlich um das Product aus den beyden Zahlen, die die beyden Zahlenvierecke gemein haben, und der gerade darüber in der obern Horizontalreihe stehenden, so erhält man nach [IIII. Kap. 14. 2) Zus.] und den vierten Gleichungen in (F) und (G)

$$21.25 + 7.21.131 = 21.(25 + 7.131) = 21.942$$
$$4.131 + 7.21.131 = (4 + 7.21).131 = 151.131$$

Es ist also auch 21.942 — 151.131 = 1, oder bewiesen, daß auch das folgende, mithin alle Zahlenvierecke diese Eigen

genschaft haben. Daraus ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= 1.1 - 0.0 \\ &= 1.1 - 0.6 \\ &= 1.25 - 4.6 \quad (I) \\ &= 21.25 - 4.131 \\ &= 21.942 - 151.131 \\ &= 474.942 - 151.2957 \end{aligned}$$

und es sind nach (15.) in der mittlern und untern Reihe von ♂ sowohl jede zwo zunächst neben als auch über einander stehende Zahlen, z. B. 21 und 151, 25 und 131, 151 und 942, relative Primzahlen. Nun ergiebt sich aus den letzten am weitesten zur Rechten in der mittlern und untern Reihe von ♂ befindlichen Zahlen nach vorigem Zusatze die letzte Gleichung unter (E)

$$0 = 474.a - 2957.b$$

es ist also auch $474.a = 2957.b$, und dieses Product ist, weil, wie so eben gezeigt worden, 474 und 2957 relative Primzahlen sind, nach (14. Zus.) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b. Nach 2) Zusatze ist aber auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b gleich $\beta.a = \alpha.b$, es ist demnach $474 = \beta$, und $2957 = \alpha$, oder die letzten Zahlen der mittlern und untern Reihe in der Rechnung ♂ sind die Zahlen β und α. Man kann dies auch so darthun: Vermöge der letzten Gleichung unter (H) im vorigen Zusatze ist

$$474.\alpha = 2957.\beta$$

Da nun, wie eben bewiesen worden, 474 und 2957 relative Primzahlen sind, so wird nach (16) β von 474 und α von 2957 gemessen; da aber auch nach 1) Zus. oder auch nach der vorletzten Gleichung unter (H) und (15) α und β relative Primzahlen sind, so wird nach (16) auch 474 von β und 2957 von α gemessen, also muß $474 = \beta$ und $2957 = \alpha$ seyn. Man übersieht es auch so: Die vorletzte Gleichung

chung unter (H) multiplicirt mit der letzten Zahl der mittlern Reihe von ♂ oder mit 474 giebt nach [IIII. Kap. 5. 1) und 2) Zus.]

$$474 = (474.942).\beta - (474.151).\alpha$$

Eben so erhält man, wenn man die letzte Gleichung unter (H) mit der vorletzten Zahl der mittlern Reihe von ♂ oder mit 151 multiplicirt,

$$0 = (151.474).\alpha - (151.2957).\beta$$

Diese Gleichung zu der vorigen addirt, giebt nach [III. Kap. 7. 4) Zus. V]

$$474 = (474.942).\beta - (151.2957).\beta$$

oder nach [IIII. Kap. 5. 1) Zus.]

$$474 = (474.942 - 151.2957).\beta$$

oder nach der letzten Gleichung unter (*I*)

$$474 = 1.\beta = \beta$$

es ist demnach auch $2957 = \alpha$. Man kann also, um die beyden Zahlen α und β zu finden, aus den Quotienten der Rechnung ☉ auch die Rechnung ♂ verfertigen; die Rechnung ☽ ist aber zu diesem Zwecke kürzer.

7) Zusatz. Man kann die Rechnungen ☉, ☽, ♂ sehr kurz in einem einzigen, nämlich folgenden Schema darstellen:

		6,	4,	5,	7,	3	
☉	269087,	43134,	10283,	2002,	273,	91,	0,
☽	2957,	474,	113,	22,	3,	1,	0
♂	1.	0	1.	4	21.	151	474.
	0	1.	6	25.	131	942.	2957

wo die obere Horizontalreihe die in ☉ herausgekommenen Quotienten nach ihrer Ordnung, die nächstfolgende zweyte die Divisionszahlen, die dritte die untere Horizontalreihe der Rechnung ☽, die vierte und fünfte endlich die mittlere und

un-

untere Horizontalreihe der Rechnung ♂ enthält. Die obere Horizontalreihe stellt in Verbindung mit der zweyten die ganze Rechnung ☉, mit der dritten die ganze Rechnung ☽, mit der vierten und fünften endlich die ganze Rechnung ♂ dar. Die Gleichungen, welche in II des Beweises unter (A) und (B), im 4) Zusatze unter (C) und (D), im 5) Zusatze unter (E), (F), (G), (H), und im 6) Zus. unter (I) aufgestellt sind, ja sogar diejenigen im 4) Zusatze, wodurch die kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen jeder zwo zunächst neben einander stehenden Divisionszahlen bestimmt werden, lassen sich aus selbigem mit größter Leichtigkeit gleich abschreiben. Es bietet aber auch dieses Schema noch Stoff zu mehrern Betrachtungen dar.

Jedes Zahlenviereck, das zwo in der zweyten Horizontalreihe zunächst neben einander stehende Divisionszahlen, z. B. 2002, 273, mit denen gerade darunter in der letzten oder fünften Horizontalreihe stehenden 25, 131 bilden, hat die Eigenschaft, daß die Summe der Producte übers Kreuz allemal = a ist. Das erste Zahlenviereck am weitesten zur Linken hat diese Eigenschaft offenbar. Läßt sich nun allgemein zeigen, daß, wenn einem Zahlenviereck, z. B. dem vorhin angeführten

$$\begin{matrix} 2002, & 273, \\ 25, & 131 \end{matrix}$$

diese Eigenschaft zukommt, sie auch dem zunächst zur Rechten folgenden

$$\begin{matrix} 273, & 91, \\ 131 & 942. \end{matrix}$$

zukommen müsse, so ist bewiesen, daß alle Zahlenvierecke diese Eigenschaft haben. Dies kann aber so geschehen: Hat das erstere Zahlenviereck diese Eigenschaft, so ist

$$131.2002 + 25.273 = a$$

Nun ändert sich nach [III. Kap. 7. 2) Zus. II] eine aus zween Theilen bestehende Summe nicht, wenn man den einen Theil

um

um eine gewisse Größe vermehrt, und den andern um eben diese Größe vermindert. Vermehrt man also bey dieser Summe den letztern Theil 25.273 um das Product 7.273.131, nämlich um das Product aus den beyden Zahlen, die die beyden Zahlenvierecke gemein haben, und der gerade darüber in der obern Horizontalreihe stehenden Zahl, und vermindert man den erstern Theil 131.2002 um eben dieses Product, so erhält man nach (IIII. Kap. 14. 2) Zus. und 3) Zus.] und den vierten Gleichungen in (G) und (B)

$$25.273 + 7.273.131 = (25+7.131).273 = 942.273$$
$$131.2002 - 7.273.131 = 131.(2002 - 7.273). = 131.91$$

es ist also auch $942.273 + 131.91 = a$, oder bewiesen, daß auch dem folgenden, mithin allen Zahlenvierecken diese Eigenschaft zukomme.

Gerade eben so wird bewiesen, daß jedes Zahlenviereck, welches zwo in der zweyten Horizontalreihe zunächst neben einander stehende Divisionszahlen, z. B. 2002, 273, mit denen gerade darunter in der vierten Horizontalreihe stehenden 4, 21 bilden, die Eigenschaft habe, daß die Summe der Producte übers Kreuz allemal $= b$ ist.

Man übersieht also hieraus die Richtigkeit der Gleichungen

$$\begin{array}{llll} a = 1.269087 + 0.43134 & & b = 0.269087 + 1.43134 & \\ = 6.43134 + 1.10283 & & = 1.43134 + 0.10283 & \\ = 25.10283 + 6.2002 & & = 4.10283 + 1.2002 & \\ = 131.2002 + 25.273 & (K) & = 21.2002 + 4.273 & (L) \\ = 942.273 + 131.91 & & = 151.273 + 21.91 & \\ = 2957.91 + 942.0 & & = 474.91 + 151.0 & \end{array}$$

und man kann also sowohl a als auch b durch die Summe zweyer Vielfachen von jeden zwo zunächst auf einander folgenden Divisionszahlen ausdrücken. Es läßt sich sogar allgemein zeigen, daß jede Divisionszahl durch die Summe

oder

oder Differenz zweyer Vielfachen von jeden zwo zunächst auf einander folgenden Divisionszahlen ausgedrückt werden könne; der ausführliche Beweis dieser Behauptung gehört aber nicht hieher.

Man kann aber auch die sämmtlichen Gleichungen unter (K) und (L) durch r oder hier 91 dividiren, und bekommt mit Zuziehung der Gleichungen (C) im 4) Zusatze die im 1) Zusatze bewiesenen $a:r = \alpha$, $b:r = \beta$, und nach [V. Kap. 11. und ebend. 2) Zus.]

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1.2957 + 0.474 \\ &= 6.474 + 1.113 \\ &= 25.113 + 6.22 \\ &= 131.22 + 25.3 \\ &= 942.3 + 131.1 \\ &= 2957.1 + 942.0 \end{aligned}\right\}(M) \qquad \left.\begin{aligned} \beta &= 0.2957 + 1.474 \\ &= 1.474 + 0.113 \\ &= 4.113 + 1.22 \\ &= 21.22 + 4.3 \\ &= 151.3 + 21.1 \\ &= 474.1 + 151.0 \end{aligned}\right\}(N)$$

Bey jedem Zahlenvierecke demnach, das zwo in der dritten Horizontalreihe zunächst neben einander stehende Zahlen mit denen gerade darunter in der vierten oder fünften Horizontalreihe stehenden bilden, ist die Summe der Producte übers Kreuz im ersten Falle $= \beta$, im zweyten $= \alpha$, und auch hieraus erhellet, daß die letzten am weitesten zur Rechten stehenden Zahlen in der vierten und fünften Horizontalreihe die Zahlen β und α sind.

8) Zusatz. Man kann den letzten Divisor in ☉ oder die Zahl r allemal auf doppelte Art durch den Unterschied zweyer Vielfachen der gegebenen Zahlen a und b ausdrücken, nämlich sowohl so, daß ein Vielfaches von a der Minuend und ein Vielfaches von b der Subtrahend ist, als auch umgekehrt, daß ein Vielfaches von b der Minuend und ein Vielfaches von a der Subtrahend ist. Denn nach den beyden letzten Gleichungen unter (E) im 5) Zus. ist

$$91 = 942.b - 151.a$$
$$0 = 474.a - 2957.b$$

oder

oder

$$474.a = 2957.b$$

es ist also nach [III. Kap. 7. 5) Zus.] auch

$$91 = (474.a - 151.a) - (2957.b - 942.b)$$

oder nach [IIII. Kap. 5. 1) Zus.]

$$91 = (474 - 151).a - (2957 - 942).b$$
$$= 323.a - 2015.b$$

Die doppelten Ausdrücke von r oder 91 in gegenwärtigem Beyspiele sind daher

$$91 = 942.b - 151.a = 323.a - 2015.b$$

9) Zusatz. Sind die beyden gegebenen Zahlen a und b relative Primzahlen, so ist $r = 1$, also $a = \alpha$, $b = \beta$, und überhaupt die Zahlen in der untern Reihe von ☽ mit den Divisionszahlen einerley, jede zwo zunächst auf einander folgende Divisionszahlen ebenfalls relative Primzahlen, die letzten Zahlen der mittlern und untern Reihe von ♂ mit b und a einerley, auch die Gleichungen (H), (M), (N) mit den Gleichungen (E), (K), (L) identisch. Man kann also dann nach vorigem Zusatze die Zahl 1 auf doppelte Art durch den Unterschied zweyer Vielfachen der gegebenen Zahlen a und b ausdrücken. Man mache nämlich mit ihnen die Rechnung ☉, wo also der letzte Divisor 1 seyn wird; aus den in ☉ gefundenen Quotienten verfertige man die Rechnung ♂, so werden die vorletzten Zahlen der mittlern und untern Reihe davon, ingleichen die Unterschiede zwischen den beyden letzten Zahlen der mittlern und untern Reihe mit a und b multiplicirt die verlangten Vielfachen geben. Es seyen z. B. die beyden relativen Primzahlen 6723 und 14773, so ist

```
6723 | 14773 | 2
     | 13446
       -----
        1327 | 6723 | 5
             | 6635
               ----
                 88 | 1327 | 15
                    |  88.
                      ----
                      447
                      440
                      ---
                        7 | 88 | 12
                          | 7.
                            --
                            18
                            14
                            --
                             4 | 7 | 1
                               | 4
                               3 | 4 | 1
                                 | 3
                                 1 | 3 | 3
                                   | 3
                                     0
```

```
         2   5   15   12     1      1      3
  1.  0  1.  5   76.  917   993.  1910   6723.
  0   1. 2   11. 167  2015. 2182  4197.  14773
```

$$6723 - 1910 = 4183;\quad 14773 - 4197 = 10576$$

also

$$1 = 4197.6723 - 1910.14773$$

$$1 = 4813.14773 - 10576.6723$$

welches auch die Probe ausweist, denn es ist

$$4197.6723 = 28216431,\quad 1910.14773 = 28216430$$

$$4813.14773 = 71102449,\quad 10576.6723 = 71102448$$

Der Satz [15] ist also auch umgekehrt wahr: Wenn zwo Zahlen relative Primzahlen sind, so giebt es zwey Vielfache von ihnen, die nur um 1 unterschieden sind.

Hier.

Hieraus ergiebt sich auch noch ein anderer Beweis des Lehrsatzes (16): daß nämlich, weil 6723 und 14773 relative Primzahlen sind, wenn c und d ganze Zahlen bedeuten, und $6723.c = 14773.d$ ist, c von 14773 und d von 6723 gemessen werde, läßt sich nun so erweisen:

Da

$$6723.c = 14773.d$$

so ist auch, wenn man mit 4197 multiplicirt,

$$4197.6723.c = 4197.14773.d$$

aber auch

$$1910.14773.c = 1910.14773.c$$

also, wenn man das untere vom obern nach (IIII. Kap. 14. 3) Zus.) abzieht,

$$(4197.6723 - 1910.14773).c = (4197.d - 1910.c).14773$$

oder

$$c = (4197.d - 1910.c).14773$$

und also auch

$$d = (4197.d - 1910.c).6723$$

23. Aufgabe. Die größte ganze Zahl, von welcher mehrere gegebene ganze Zahlen a, b, c, d, e gemessen werden, direct und allgemein zu finden.

Auflösung.

Man suche nach (22) das größte gemeinschaftliche Maaß

1) von a und b, welches p heißen mag;
2) von p und c, welches q heißen mag;
3) von q und d, welches r heißen mag;
4) von r und e, welches s heißen mag;

so ist s die größte ganze Zahl, von welcher a, b, c, d, e gemessen werden.

Beweis.

Nach (4) wird

r und e von s gemessen, und nach (3) wird q und d von r gemessen, mithin wird auch (9)

q und

q und d von s gemessen; nun wird nach 2) p und c von q
gemessen, mithin wird auch (9)
p und c von s gemessen; nun wird nach 1) a und b von p
gemessen, mithin wird auch (9)
a und b von s gemessen; also werden alle die Zahlen a, b,
c, d, e von s gemessen.

Da nach [20. 1) Zus.] die größte ganze Zahl, welche ein gemeinschaftliches Maaß von zwo oder mehrern andern ganzen Zahlen ist, von jeder andern ganzen Zahl, die ebenfalls ein gemeinschaftliches Maaß derselben Zahlen ist, gemessen wird, so wird von jeder ganzen Zahl, die ein gemeinschaftliches Maaß von a, b, c, d, e ist,

a und b gemessen, mithin auch p, folglich
p und c, mithin auch q, folglich
q und d, mithin auch r, folglich
r und e, mithin auch s,

also wird s von jeder ganzen Zahl, die ein gemeinschaftliches Maaß von a, b, c, d, e ist, gemessen, keine dieser Zahlen kann also größer als s seyn. Mithin ist s die größte ganze Zahl, von welcher a, b, c, d, e gemessen wird.

Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen

720, 960, 1680, 1800, 2400, 2520, 3000, 3240,

so findet man nach (22)

von	720	und	960	das	größte	gemeinschaftliche Maaß	240
⸗	240	⸗	1680	⸗	⸗	⸗	240
⸗	240	⸗	1800	⸗	⸗	⸗	120
⸗	120	⸗	2400	⸗	⸗	⸗	120
⸗	120	⸗	2520	⸗	⸗	⸗	120
⸗	120	⸗	3000	⸗	⸗	⸗	120
⸗	120	⸗	3000	⸗	⸗	⸗	120

also ist 120 die verlangte Zahl, wie im 1) Beyspiele von (20).

24.

24. Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von mehrern gegebenen ganzen Zahlen a, b, c, d, e direct und allgemein zu finden.

Auflösung.

Man suche nach [22. 2) Zus. oder 4) Zus. oder 6) Zus.] das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

1) von a und b, welches f heißen mag;
2) von f und c, welches g heißen mag;
3) von g und d, welches h heißen mag;
4) von h und e, welches i heißen mag;

so ist i das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beweis.

Nach (4) wird

i von h und e gemessen, und nach 3) wird h von g und d gemessen, mithin wird auch (9)

i von g und d gemessen; nun wird nach 2) g von f und c gemessen, mithin wird auch (9)

i von f und c gemessen; nun wird nach 1) f von a und b gemessen, mithin wird auch (9)

i von a und b gemessen,

also ist i ein gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen a, b, c, d, e.

Da nach (14.) jedes gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Größen von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Größen gemessen wird, so wird jedes gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d, e

von a und b, mithin auch von f gemessen; also
von f und c, mithin auch von g; also
von g und d, mithin auch von h; also
von h und e, mithin auch von i.

Jedes gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d, e wird also von i gemessen, kann also unmöglich kleiner als i seyn. Also

ist

ist i das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d und e.

Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen

54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81, 84, 90, 91, 96, 99,

so findet man nach (22. 2) oder 4) oder 6) Zus.) von

54 und 56	das kleinste gemeinschaftliche Vielfache			1512
1512 und 60	:	:	:	7560
7560 und 63	:	:	:	7560
7560 und 64	:	:	:	60480
60480 und 70	:	:	:	60480
60480 und 72	:	:	:	60480
60480 und 75	:	:	:	302400
302400 und 80	:	:	:	302400
302400 und 81	:	:	:	907200
907200 und 84	:	:	:	907200
907200 und 90	:	:	:	907200
907200 und 91	:	:		11793600
11793600 und 96	:	:		11793600
11793600 und 99	:	:		129729600

also ist 129729600 das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache, wie im dritten Beyspiele von (21).

Neun-

Neuntes Kapitel.

Von den Brüchen.

1. Erklärung.

Wenn man die Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilt, und solcher Theile einen oder einige nimmt, so heißt die dadurch entstehende Größe ein Bruch. Die Zahl, welche anzeigt, in wieviel gleiche Theile die Einheit eingetheilt worden sey, heißt der Nenner des Bruchs, und diejenige, welche anzeigt, wieviel solcher Theile genommen worden, der Zähler.

2. Erklärung. Man schreibt einen Bruch so, daß man einen Horizontalstrich macht, und den Zähler darüber, den Nenner darunter schreibt. Ist z. B. die Einheit in 8 gleiche Theile getheilt worden, und man nimmt 5 solcher Theile, so ist 8 der Nenner, 5 der Zähler, der Bruch wird geschrieben $\frac{5}{8}$, und ausgesprochen: Fünf Achttheile. Wäre die Einheit der Thaler, so ist der achte Theil davon drey Groschen, dieses fünfmal genommen giebt 15 Groschen, also ist der Bruch $\frac{5}{8}$ auf den Thaler als Einheit bezogen soviel als 15 Groschen.

Zusatz. Der Bruch $\frac{5}{8}$ ist das Fünffache einer Größe, die 8mal genommen die Einheit giebt.

3. Lehrsatz. Wenn bey einem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner ist, so ist er kleiner als 1; z. B. $\frac{4}{7} > 1$.

Beweis.

Der Bruch $\frac{4}{7}$ ist nach (2. Zus.) das Vierfache einer Größe, die 7mal genommen die Einheit giebt. Man nimmt diese Größe also noch nicht sovielmal, als erfordert wird, um die Einheit zu haben, bekommt also weniger als die Einheit oder 1.

Zusatz. Ein solcher Bruch wie $\frac{4}{7}$ heißt daher ein eigentlicher Bruch.

4. Lehrsatz. Wenn bey einem Bruche der Zähler dem Nenner gleich ist, so ist er gleich 1; z. B. $\frac{7}{7} = 1$.

Beweis.

Der Bruch $\frac{7}{7}$ ist das 7fache einer Größe, die 7mal genommen die Einheit giebt, also die Einheit selbst.

5. Lehrsatz. Wenn bey einem Bruche der Zähler größer als der Nenner ist, so ist er größer als 1; z. B. $\frac{11}{7} > 1$.

Beweis.

Der Bruch $\frac{11}{7}$ ist das 11fache einer Größe, die 7mal genommen die Einheit giebt. Man nimmt diese Größe also mehrmal als erfordert wird, um die Einheit zu haben, bekommt also mehr als die Einheit oder 1.

Zusatz. Ein solcher Bruch, wie $\frac{11}{7}$, heißt daher ein uneigentlicher Bruch.

6. Lehrsatz. Die Summe mehrerer Brüche, die einerley Nenner haben, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Summe der Zähler, und dessen Nenner dem gemeinschaftlichen Nenner aller Brüche gleich ist; z. B.

$$\frac{4}{97} + \frac{8}{97} + \frac{17}{97} = \frac{4+8+17}{97} = \frac{29}{97}$$

Beweis.

Denn wenn man von einer Größe, die 97mal genommen die Einheit giebt, das 4fache, 8fache und 17fache zusammen addirt, so kommt offenbar das (4 + 8 + 17)fache oder das 29fache dieser Größe heraus.

1) Zusatz. Man kann jede ganze Zahl durch einen Bruch, dessen Nenner gegeben ist, ausdrücken, wenn man für den

den Zähler das Product aus derselben und dem gegebenen Nenner annimmt; z. B. $4 = \frac{4.7}{7} = \frac{28}{7}$.

Denn nach (4) ist

$$1 + 1 + 1 + 1 = \tfrac{7}{7} + \tfrac{7}{7} + \tfrac{7}{7} + \tfrac{7}{7}$$

und nach (6)

$$\tfrac{7}{7} + \tfrac{7}{7} + \tfrac{7}{7} + \tfrac{7}{7} = \frac{7+7+7+7}{7}$$

also auch

$$1 + 1 + 1 + 1 = \frac{7+7+7+7}{7}$$

oder was dasselbe ist,

$$4 = \frac{4.7}{7}$$

Was also von Brüchen im Allgemeinen gilt, gilt auch von ganzen Zahlen.

2) Zusatz. Um eine ganze Zahl, nebst einem angehängten eigentlichen Bruche, in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln, multiplicire man die ganze Zahl mit dem Nenner des eigentlichen Bruches, und addire den Zähler zum Producte, so kommt der Zähler des uneigentlichen Bruches heraus, dessen Nenner mit dem Nenner des eigentlichen Bruches einerley ist; z. B. $487 + \frac{11}{27}$, welches man gewöhnlich blos so schreibt $487\frac{11}{27}$, ist gleich $\frac{487.27 + 11}{27}$. Denn nach 1) Zus. ist $487 = \frac{487.27}{27}$, mithin $487 + \frac{11}{27} = \frac{487.27}{27} + \frac{11}{27} = \frac{487.27 + 11}{27} = \frac{13160}{27}$. Man nennt dies einen Bruch einrichten.

3) Zusatz. Umgekehrt, um einen gegebenen uneigentlichen Bruch durch eine ganze Zahl nebst einem ange-

hängten eigentlichen Bruche auszudrücken, dividire man den Zähler durch den Nenner, der herauskommende Quotient ist die ganze Zahl, und der Ueberrest der Zähler des anzuhängenden eigentlichen Bruches, dessen Nenner mit dem Nenner des gegebenen uneigentlichen Bruches einerley ist. Gienge aber die Division auf, so ist der gegebene uneigentliche Bruch dem herausgekommenen Quotienten vollkommen gleich. Soll man z. B. den Bruch $\frac{13160}{27}$ durch eine ganze Zahl ausdrücken, so dividire man 13160 durch 27

```
27)13160|487
   108..|
   ----
    236
    216.
    ----
     200
     189
     ---
      11
```

also ist nach der Division $13160 = 487.27 + 11$, mithin $\frac{13160}{27} = \frac{487.27+11}{27} = 487\frac{11}{27}$ nach 2) Zus. Soll man aber $\frac{2006956}{229}$ durch eine ganze Zahl ausdrücken, so dividire man 2006956 durch 229

```
229)2006956|8764
    1832...|
    ----
     1749
     1603..
     ----
      1465
      1374.
      ----
        916
        916
        ---
          0
```

also

also ist nach der Division $2006956 = 8764 . 229$ und
$$\frac{2006956}{229} = \frac{8764.229}{229} = 8764 \text{ nach 1) Zus.}$$

7. Lehrsatz. Der Unterschied zweener Brüche, die einerley Nenner haben, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler dem Unterschiede der Zähler, und dessen Nenner dem gemeinschaftlichen Nenner beyder Brüche gleich ist. So ist z. B.
$$\frac{58}{97} - \frac{39}{97} = \frac{58-39}{97} = \frac{19}{97}$$

Beweis.

Nach (6) ist
$$\frac{58-39}{97} + \frac{39}{97} = \frac{(58-39)+39}{97} = \frac{58}{97}$$
woraus der Satz folgt.

8. Lehrsatz. Wenn ein Bruch als Multiplicand mit einer ganzen Zahl als Multiplicator multiplicirt werden soll, so ist das Product gleich einem Bruche, dessen Zähler das Product aus dem Multiplicator und dem Zähler des Multiplicands, und dessen Nenner dem Nenner des Multiplicands gleich ist. So ist z. B. $3.\frac{28}{97} = \frac{3.28}{97} = \frac{84}{97}$.

Beweis.

Nach (6) ist
$$3.\frac{28}{97} = \frac{28}{97} + \frac{28}{97} + \frac{28}{97} = \frac{28+28+28}{97} = \frac{3.28}{97}$$

1) Zusatz. Ist bey dem gefundenen Bruche der Zähler größer als der Nenner, so kann man ihn nach [6. 3) Zus.] auf eine ganze Zahl bringen; z. B.
$$64.\frac{79}{105} = \frac{64.79}{105} = \frac{5056}{105} = 48\frac{16}{105}$$

2)

2) Zusatz. Man ist nun auch im Stande, eine ganze Zahl, nebst einem angehängten eigentlichen Bruche als Multiplicand, mit einer andern gegebenen ganzen Zahl als Multiplicator zu multipliciren. So ist z. B.

$$69 . 48371 \frac{117}{359} = 69 . 48371 + 69 . \frac{117}{359} \text{ nach [IIII. Kap. 5]}$$

$$69 . \frac{117}{359} = \frac{8073}{359} = 22 \frac{175}{359} \text{ nach vorigem Zusatze}$$

$$69 . 48371 = 3337599 \text{ also}$$

$$69 . 48371 \frac{117}{359} = 3337599 + 22 \frac{175}{359} = 3337621 \frac{175}{359}$$

3) Zusatz. Ein Bruch als Multiplicand mit seinem Nenner als Multiplicator multiplicirt giebt zum Producte allemal den Zähler. Denn es ist

$$7 . \tfrac{4}{7} = \tfrac{7 . 4}{7} \text{ nach (8)}$$
$$\tfrac{4 . 7}{7} = 4 \text{ nach (6. 1) Zus.)}$$

also auch, weil $4 . 7 = 7 . 4$, nothwendig

$$7 . \tfrac{4}{7} = 4.$$

4) Zusatz. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die erste Definition der Division, die in (Einl. 15) gegeben ist, zum Grunde legt, nach [V. Kap. 10. 1]

$$4 : 7 = \tfrac{4}{7}$$

das heißt wörtlich: Ein Quotient zwoer ganzer Zahlen ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Dividend, und dessen Nenner der Divisor ist.

5) Zusatz. Weil 23 durch 7 dividirt 3 zum Quotienten und 2 zum Reste giebt, so ist nach [6. 3) Zus.]

$$\tfrac{23}{7} = 3\tfrac{2}{7}$$

aber auch nach vorigem Zusatze

$$23 : 7 = \tfrac{23}{7}$$

mit.

mithin auch

$$23 : 7 = 3\frac{2}{7}$$

das heißt wörtlich: Wenn eine ganze Zahl 23 durch eine andere kleinere 7 nach der ersten Definition der Division dividirt werden soll, und die Division nicht aufgeht, so muß, um den Quotienten vollständig zu haben, zu dem in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten 3 noch ein eigentlicher Bruch hinzugesetzt werden, dessen Zähler der Rest 2, und dessen Nenner der Divisor ist. Es sind also auch die vollständigen Quotienten der Exempel [VI. Kap. 10) Zus. und ebend. 11. 2) Beyspiel] $285\frac{5}{7}$ Pfennige und 913 Centner 62 Pfund 11 Loth $3\frac{3}{4}\frac{5}{7}\frac{6}{9}$ Quentchen.

9. Lehrsatz. Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl nach der ersten Definition der Division dividirt werden soll, und der Divisor im Zähler des Dividends aufgeht, so ist der Quotient ein Bruch, dessen Zähler herauskommt, wenn man den Zähler des Dividends durch den Divisor dividirt, und dessen Nenner mit dem Nenner des Dividends einerley ist. Weil z. B. 6 in 48 aufgeht, so ist

$$\frac{48}{97} : 6 = \frac{48 : 6}{97} = \frac{8}{97}$$

Beweis.

Nach (8) und [V. Kap. 10. II] ist

$$6.\frac{48 : 6}{97} = \frac{6.(48 : 6)}{97} = \frac{48}{97}$$

also auch nach [V. Kap. 10. I]

$$\frac{48}{97} : 6 = \frac{48 : 6}{97}$$

10. Lehrsatz. Ein Bruch ändert sich nicht, I wenn man Zähler und Nenner mit einerley ganzen Zahl multiplicirt; II wenn man Zähler und Nenner durch einerley ganze Zahl,

Zahl, die in beyden aufgeht, oder nach [VIII. Kap. 4] ein gemeinschaftliches Maaß von beyden ist, dividirt; III wenn man Zähler und Nenner in einerley Zahl, in welcher beyde aufgehen, oder welche nach [VIII. Kap. 6.] ein gemeinschaftliches Vielfaches von beyden ist, hineindividirt, und die Quotienten umgekehrt schreibt. So ist z. B.

$$\text{I. } \frac{4}{7} = \frac{4.5}{7.5} = \frac{20}{35}; \text{ II. } \frac{28}{64} = \frac{28:4}{64:4} = \frac{7}{16}; \text{ III. } \frac{14}{35} = \frac{140:35}{140:14} = \frac{4}{10}$$

Beweis.

Für I. Nach (4) ist $\frac{7}{7} = 1 = \frac{7.5}{7.5}$, also auch $\frac{7}{7} : 7 = \frac{7.5}{7.5} : 7$, oder nach (9) $\frac{1}{7} = \frac{5}{7.5}$, mithin auch $4.\frac{1}{7} = 4.\frac{5}{7.5}$ oder nach (8) $\frac{4}{7} = \frac{4.5}{7.5}$

Für II. Wegen I ist $\frac{28:4}{64:4} = \frac{(28:4).4}{(64:4).4} = \frac{28}{64}$

Für III. Wegen I ist $\frac{14}{35} = \frac{14\,(140:14)}{35.(140:14)} = \frac{140}{35.(140:14)} = \frac{35.(140:35)}{35.(140:14)} = \frac{140:35}{140:14}$

1) Zusatz. Hieraus erhellet, daß zween verschieden ausgedrückte Brüche doch einerley Werth haben oder einander gleich seyn können, es ist aber auch offenbar, daß, wenn zween Brüche gleiche Nenner und gleiche Werthe haben, auch ihre Zähler gleich seyn müssen.

2)

2) Zusatz. Der Theil III des aufgestellten Lehrsatzes könnte mit andern Worten auch so ausgedrückt werden: Wenn bey zween Brüchen $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c}$ die Producte übers Kreuz b.c und d.a einander gleich sind, so sind sie einander gleich.

3) Zusatz. Aber auch umgekehrt: Wenn zween Brüche $\frac{b}{}$ und $\frac{d}{c}$ gleich sind, so sind auch die Producte übers Kreuz b.c und d.a einander gleich. Denn es ist $\frac{b}{a} = \frac{b.c}{a.c}$ und $\frac{d}{c} = \frac{d.a}{c.a}$; ist nun $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist auch $\frac{b.c}{a.c} = \frac{d.a}{c.a}$, also nach 1) Zus. b.c = d.a.

4) Zusatz. Will man also untersuchen, ob zween verschieden ausgedrückte Brüche gleichen Werth haben oder nicht, so berechne man die beyden Producte übers Kreuz. Sind sie gleich, so sind es auch die Brüche, sonst aber nicht.

5) Zusatz. Ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist nach 3) Zus. b.c = a.d, mithin nach 2) Zus. auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Ist derowegen b = d, so ist auch a = c; ist aber b < d, so ist auch a < c, und man sagt dann, der Werth dieser beyden Brüche sey durch $\frac{b}{a}$ in kleinern Zahlen als durch $\frac{d}{c}$ ausgedrückt, oder $\frac{b}{a}$ enthalte kleinere Zahlen als $\frac{d}{c}$.

6) Zusatz. Sind Zähler und Nenner eines Bruchs nicht relative Primzahlen (VIII. Kap. 5), so giebt es eine ganze Zahl größer als 1, welche in Zähler und Nenner aufgeht;

geht; man kann dann Zähler und Nenner des Bruches, ohne seinen Werth zu ändern, durch gedachte ganze Zahl dividiren, und also seinen Werth in kleinern Zahlen darstellen. Man nennt dies Verfahren den Bruch durch die gedachte Zahl aufheben.

7) Zusatz. Sind aber Zähler und Nenner eines Bruchs $\frac{b}{a}$ relative Primzahlen, so entsteht jeder Bruch $\frac{d}{c}$, der vorigem gleich ist, aus ihm nach I, oder dadurch, daß man Zähler b und Nenner a desselben mit einer ganzen Zahl multiplicirt. Denn dann ist nach 3) Zus. $b.c = d.a$, und es giebt nach (VIII. Kap. 16) eine ganze Zahl k von der Beschaffenheit, daß $d = k.b$ und $c = k.a$ ist. Von den beyden gleichen Brüchen $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c}$ kann also dann $\frac{d}{c}$ unmöglich kleinere Zahlen enthalten als $\frac{b}{a}$, und es läßt sich daher der Werth des Bruchs $\frac{b}{a}$, oder aller, die ihm gleich sind, nicht in kleinern Zahlen als durch $\frac{b}{a}$ darstellen und ausdrücken.

8) Zusatz. Von dem Werthe jedes gegebenen Bruchs $\frac{b}{a}$ giebt es eine Darstellung in den kleinsten Zahlen. Denn dividirt man Zähler und Nenner desselben durch die größte ganze Zahl, welche ein gemeinschaftliches Maaß von beyden ist, nach (VIII. Kap. 20 oder 22) gefunden werden kann, und r heißen mag, so sind Zähler und Nenner des dadurch entstehenden und dem vorigen gleichen Bruches $\frac{b:r}{a:r}$ nach [VIII. Kap. 13. Z.] relative Primzahlen, folglich läßt sich nach vori-

vorigem Zusatze sein Werth nicht in kleinern Zahlen als durch $\frac{b:r}{a:r}$ ausdrücken. Sind aber b und a relative Primzahlen, so ist $r = 1$, und der Bruch steht schon in seiner kleinsten Gestalt, oder ist schon in den kleinsten Zahlen ausgedrückt.

1) Beyspiel. Der gegebene Bruch sey $\frac{134352}{424980}$, so hat man nach dem Verfahren in (VIII. Kap. 20)

$134352 = 2^4.3^3.311$ und $424980 = 2^2.3^3.5.787$ also $r = 2^2.3^3 = 4.27 = 108$

Nach dem Verfahren (ebend. 22) findet man

134352	424980	3
	403056	
21924	134352	6
	131544	
2808	21924	7
	19656	
2268	2808	1
	2268	
540	2268	4
	2160	
108	540	5
	540	
	000	

also ebenfalls $r = 108$.

Es ist derohalb von dem gegebenen Bruche $\frac{134352:108}{424980:108}$ oder $\frac{1244}{3935}$ die Darstellung in den kleinsten Zahlen.

Hat man, um r zu finden, das erste Verfahren angewendet, so kann man, um die Quotienten a : r und b : r zu finden, so zu Werke gehen:

2^a.

$2^4.3^3.311 : 2^2.3^3 = 2^{4-2}.3^{3-3}.311 = 4.1.311 = 1244$
$2^2.3^3.5.787 : 2^2 3^3 = 2^{2-2}.3^{3-3}.5.787 = 1.1.5.787 = 3935$

Hat man aber das andere in (VIII. Kap. 22.) angegebene Verfahren gebraucht, so können die Quotienten $a:r$ und $b:r$ oder die Zahlen, welche wir daselbst im 1) Zus. α und β genannt haben, entweder vermittelst der Rechnung ☽ (ebend. 4) Zus.)

		3,	6,	7,	1,	4,	5
☽	3935,	1244,	203,	26,	21,	5,	1, 0

oder vermittelst der Rechnung ♂ [ebend. 5) Zus.]

		3	6	7	1	4	5	
♂	1.	0	1.	6	43.	49	239.	1244
	0	1.	3	19.	136	155.	756	3935.

gefunden werden, weil (ebend. 6) Zus.) die letzten Zahlen der mittlern und untern Reihe die Zahlen β und α sind; die Rechnung ☽ ist aber zu diesem Zwecke kürzer, jedoch hat die Rechnung ♂ in anderer Hinsicht ihre Vortheile, wie weiter unten erhellen wird.

2) Beyspiel. Der gegebene Bruch sey $\frac{80117600}{569698191}$, so ist $80117600 = 2^5.5^2.17.43.137$ und $569698191 = 3^8.31.2801$, also Zähler und Nenner relative Primzahlen, mithin ist der gegebene Bruch schon in den kleinsten Zahlen ausgedrückt. Eben dies fände man nach dem andern Verfahren.

11. Lehrsatz. Wenn man den Zähler eines Bruchs ungeändert läßt, den Nenner aber mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der gegebene Bruch durch die gedachte ganze Zahl nach der ersten Definition von Division dividirt; z. B. $\frac{11}{97} : 4 = \frac{11}{4.97}$

Be-

Beweis.

Nach (8) und (10) ist

$$4 . \frac{11}{4 . 97} = \frac{4 . 11}{4 . 97} = \frac{11}{97}$$

woraus der Satz folgt.

1) Zusatz. Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so verfahre man nach (9), wenn es angeht; sonst nach (11). Daß z. B.

$$\frac{24}{35} : 8 = \frac{3}{35}, \quad \frac{45}{91} : 5 = \frac{9}{91}, \quad \frac{117}{157} : 13 = \frac{9}{157}$$

sey, findet man nach (9); daß aber

$$\frac{6}{29} : 5 = \frac{6}{145}, \quad \frac{7}{27} : 11 = \frac{7}{297}, \quad \frac{11}{31} : 27 = \frac{11}{837}$$

sey, findet man nach (11).

2) Zusatz. Soll eine ganze Zahl, nebst einem angehängten eigentlichen Bruche, durch eine größere ganze Zahl dividirt werden, so richte man nach [6. 2) Zus.] den Dividend erst ein, und verfahre dann nach (9), wenn es angeht, sonst aber nach (11). Nach (9) findet man z. B., daß

$$5\tfrac{11}{14} : 9 = \tfrac{81}{14} : 9 = \tfrac{9}{14}$$
$$6\tfrac{3}{19} : 13 = \tfrac{117}{19} : 13 = \tfrac{9}{19}$$
$$8\tfrac{7}{17} : 11 = \tfrac{143}{17} : 11 = \tfrac{13}{17}$$

Nach (11) aber findet man

$$3\tfrac{4}{9} : 7 = \tfrac{31}{9} : 7 = \tfrac{31}{63}$$
$$6\tfrac{13}{17} : 16 = \tfrac{115}{17} : 16 = \tfrac{115}{272}$$
$$8\tfrac{17}{59} : 23 = \tfrac{489}{59} : 23 = \tfrac{489}{1357}$$

3) Zusatz. Soll eine ganze Zahl, nebst einem angehängten eigentlichen Bruche, durch eine kleinere ganze Zahl di-

dividirt werden, so dividire man erst blos die ganze Zahl durch den Divisor nach [V. Kap. 5 oder 7], hänge an den Ueberrest den gegebenen eigentlichen Bruch an, und dividire die dadurch entstehende Größe von neuem nach 2) Zus. durch den Divisor.

1) Beyspiel. Man sucht $291335\frac{18}{59}:67$

```
67) 291335 18/59 | 4348
    268..
    ----
     233
     201..
     ----
      323
      268.
      ----
       555
       536
       ----
        19 18/59
        59
       ----
       171
       95(8
       (1
      -----
67)  1139 | 17
     67.
     ----
     469
     469
     ----
       0
```

also ist $4348\frac{17}{59}$ der gesuchte Quotient. Denn aus der gemachten Rechnung erhellet, daß

$$291335 = 67.4348 + 19$$

mithin

$$291335\frac{18}{59} = 67.4348 + 19\frac{18}{59}$$

es ist also nach (V. Kap. 11. und ebend. 10. I)

$$291335\frac{18}{59}:67 = 4348 + (19\frac{18}{59}:67) \text{ und}$$

$19\frac{18}{59}$

$19\frac{18}{59} : 67 = \frac{1139}{59} : 67 = \frac{17}{59}$ nach [6. 2) Zus. und 9].

2) Beyspiel. Man sucht $3837552\frac{11}{27} : 41$.

```
41)3837552 11/27|936
   369....      |   02
   ---          |-------
   147          |93598
   123...
   ---
    245
    246..
    ---
     47
     82
     ---
     34 11/27        41
     27              27
    ---             ---
    238             287
    68(1             82
    (1              ----
    ---             1107
 41)929|22
    82 |
    ---
    109
     82
    ---
     27
```

also ist der Quotient $93598\frac{929}{1107}$. Denn nach der gemachten Rechnung ist

$$3837552\frac{11}{27} = 41.93598 + 34\frac{11}{27}$$

also nach [V. Kap. 11. und ebend. 10, I]

$$3837552\frac{11}{27} : 41 = 93598 + (34\frac{11}{27} : 41) \text{ und}$$

$34\frac{11}{27} : 41 = \frac{929}{27} : 41 = \frac{929}{1107}$ (nach 6. 2) Zus. und 11), denn das Verfahren (9) kann hier nicht angewendet werden, weil, wie die letzte unterste Division ausweist, 929 nicht durch 41 aufgeht. Bey der Division der ganzen Zahlen

len ist der in (V. Kap. 7. 4) Zus.) angegebene Vortheil gebraucht worden.

12. Lehrsatz. Wenn der Nenner eines gegebenen Bruches durch eine ganze Zahl ohne Rest sich dividiren läßt, so wird, wenn man den Nenner durch die gedachte Zahl dividirt, den Zähler aber ungeändert läßt, der gegebene Bruch als Multiplicand mit dieser ganzen Zahl als Multiplicator multiplicirt; z. B. $13.\frac{4}{91} = \frac{4}{91:13} = \frac{4}{7}$

Beweis.

Nach (8) und (10) ist

$$13.\frac{4}{91} = \frac{13.4}{91} = \frac{13.4}{13.(91:13)} = \frac{4}{91:13} = \frac{4}{7}$$

Zusatz. Soll also ein gegebener Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so verfahre man nach diesem Lehrsatze, wenn es angeht, sonst aber nach (8).

13. Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche von verschiedenen Nennern ohne Aenderung ihres Werthes auf einerley Nenner zu bringen.

Auflösung.

Man suche nach (VIII. Kap. 20 oder 24) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller gegebenen Nenner, so ist dies der gemeinschaftliche Nenner, auf welchen alle Brüche gebracht werden, oder der Generalnenner.

2) Um den Zähler eines Bruches zu finden, dessen Nenner der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist, und der einem der gegebenen Brüche gleich ist, dividire man den gemeinschaftlichen Nenner durch den Nenner des gegebenen Bruches, so geht die Division auf, und der Quotient mit dem Zähler des gegebenen Bruches multiplicirt giebt den verlangten Zähler.

Bey-

Beyspiel. Die gegebenen Brüche seyen

$\frac{5}{8}, \frac{2}{9}, \frac{7}{10}, \frac{3}{11}, \frac{1}{12}, \frac{4}{15}, \frac{6}{16}, \frac{17}{20}, \frac{12}{23}, \frac{9}{35}$

so findet man nach [VIII. Kap. 21 oder 24) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner 1275120.

8) 1275120
159390 (5
796950

$\frac{5}{8} = \frac{796950}{1275120}$

9) 1275120
141680 (2
283360

$\frac{2}{9} = \frac{283360}{1275120}$

10) 1275120
127512 (7
892584

$\frac{7}{10} = \frac{892584}{1275120}$

11) 1275120
115920 (3
347760

$\frac{3}{11} = \frac{347760}{1275120}$

12) 1275120
106260

$\frac{1}{12} = \frac{106260}{1275120}$

15) 1275120 | 85008 (4
120.... 340032
75
75
120
120
0

$\frac{4}{15} = \frac{340032}{1275120}$

```
16) 1275120 | 79695                        9       717255
    112.... |-------(9                     -- =   -------
    ---     |717255                        16      1275120
     155
     144...
     ---
      111
       96..
      ---
       152
       144.
       ---
         80
         80
         --
          0
```

```
    1275120                                17      1083852
20)--------                                -- =   -------
      63756                                20      1275120
    --------(17
    1083852
```

```
23) 1275120 | 55440                        12      665280
    115...  |-------(12                    -- =   -------
    ---     |665280                        23      1275120
     125
     115..
     ---
      101
       92.
      ---
        92
        92
        --
         0
```

```
35)1275120(36432
   105....  ─────(9   0/35 = 327888/1275120
   ───      327888
    225
    210...
    ───
     151
     140..
     ───
      112
      105.
      ───
        70
        70
        ──
         0
```

Beweis.

Der letzte Bruch $\frac{0}{35}$ ist nach (10. I) $= \frac{0.36432}{35.36432}$, und nach der gemachten Rechnung ist $9.36432 = 327888$; da aber auch $1275120 : 35 = 36432$, so ist $35.36432 = 1275120$, also $\frac{0}{35} = \frac{327888}{1275120}$. Eben so ist der Beweis bey den andern Brüchen.

14. Aufgabe. Mehrere eigentliche Brüche von verschiedenen Nennern zusammen zu addiren.

Auflösung.

Man bringe sie alle nach (13) auf einerley Nenner, und addire die herauskommenden Zähler zusammen. Ein Bruch, dessen Zähler die herauskommende Summe, und dessen Nenner der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist, ist die verlangte Summe, welche man auch, wenn sie größer als 1 ist, nach (6. 3) Zus.) durch eine ganze Zahl und einen eigentlichen angehängten Bruch ausdrücken kann.

Beweis

Folgt aus (6).

Beyspiel. Die Summe $\frac{5}{8} + \frac{2}{9} + \frac{7}{10} + \frac{3}{11} + \frac{1}{12} + \frac{4}{15} + \frac{9}{16} + \frac{17}{20} + \frac{12}{23} + \frac{9}{35}$ zu finden. Man bringe sie nach (13) alle auf einerley Nenner, so bekommt man

$$\begin{array}{lcl}
\frac{5}{8} & = & \frac{796950}{1275120} \\
\frac{2}{9} & = & \frac{283360}{1275120} \\
\frac{7}{10} & = & \frac{892584}{1275120} \\
\frac{3}{11} & = & \frac{347760}{1275120} \\
\frac{1}{12} & = & \frac{106260}{1275120} \\
\frac{4}{15} & = & \frac{340032}{1275120} \\
\frac{9}{16} & = & \frac{717255}{1275120} \\
\frac{17}{20} & = & \frac{1083852}{1275120} \\
\frac{12}{23} & = & \frac{665280}{1275120} \\
\frac{9}{35} & = & \frac{327888}{1275120}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 796950 & \\
 & 283360 & \\
 & 892584 & \\
 & 347760 & \\
 & 106260 & \\
 & 340032 & \\
 & 717255 & \\
 & 1083852 & \\
 & 665280 & \\
 & 327888 & \\
\hline
1275120) & 5561221 & 4 \\
 & 5100480 & \\
\hline
 & 460741 &
\end{array}$$

also ist die verlangte Summe $4\frac{460741}{1275120}$.

1) Zusatz. Befinden sich noch ganze Zahlen bey den Brüchen, so addirt man diese besonders zusammen, und nimmt noch die aus der Summe der eigentlichen Brüche entstandene ganze Zahl dazu. Hängt man an die so herauskommende Zahl noch den bey der Summe der eigentlichen Brüche übriggebliebenen eigentlichen Bruch an, so hat man die verlangte Summe.

2) Zusatz. Hat man, um den gemeinschaftlichen Nenner, welcher hier 1275120 ist, zu finden, das Verfahren (VIII. Kap. 21) gebraucht, so hat man ihn zugleich in seine Factoren, die alle absolute Primzahlen sind, $2^4 . 3^2 . 5 . 7 . 11 . 23$ zerlegt, und dann ist es leicht zu untersuchen, ob sich der in der Summe vorkommende eigentliche Bruch noch in kleinern Zahlen ausdrücken lasse oder nicht. Geht, wie hier, der Zähler durch keine der absoluten Primzahlen 2, 3, 5, 7,

11,

11, 23, die im Nenner als Factoren vorkommen, auf, so läßt der Bruch sich nicht in kleinern Zahlen ausdrücken, wegen (10. 7) Zus.) und [VIII. Kap. 5. Zus. und 16. 3) Zus.] Von mehrern Primzahlen, die im gemeinschaftlichen Nenner als Factoren vorkommen, kann man oft übersehen, daß sie nicht im Zähler aufgehen, ohne den Versuch wirklich durch die Division vorzunehmen. Denn um den gemeinschaftlichen Nenner nach (VIII. Kap. 21) zu bestimmen, muß man alle gegebenen Nenner in ihre Factoren, die alle absolute Primzahlen sind, zerfällen, und die höchsten vorkommenden Potenzen aller vorkommenden Primzahlen mit einander multipliciren. Kommt nun die höchste Potenz irgend einer absoluten Primzahl nur ein einzigesmal vor, daß nämlich nur einer der gegebenen Nenner von ihr gemessen wird, alle andere aber diese Primzahl entweder gar nicht, oder doch nur niedrigere Potenzen davon enthalten, so kann diese Primzahl in dem Zähler des in der Summe vorkommenden Bruches, dessen Nenner der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist, nicht aufgehen.

Um dieses auf gegenwärtiges Beyspiel anzuwenden, bemerke man zuerst, daß die Nenner davon mit denen im ersten Beyspiele zu (VIII. Kap. 21) gegebenen Zahlen einerley sind. Man findet daselbst, daß die höchste vorkommende Potenz von 2, nämlich 2^4, nur in einer einzigen der gegebenen Zahlen, nämlich in 16 aufgeht, alle andere aber entweder, wie z. B. 15, die Zahl 2 gar nicht, oder, wie z. B. 8 und 20, nur niedrigere Potenzen davon als Factoren enthalten. Folglich kann 2 im Zähler der Summe nicht aufgehen. Eben das findet bey den höchsten vorkommenden Potenzen der Zahlen 3, 7, 11, 23, welche 3^2, 7^1, 11^1, 23^1 sind, Statt; folglich kann auch keine der Zahlen 3, 7, 11, 23 in dem Zähler der Summe aufgehen. Nur die höchste vorkommende Potenz der Zahl 5, nämlich 5, kommt mehrmals als Factor vor, nämlich in den Zahlen 10, 15, 20, 35, folglich könnte blos diese in dem Zähler der Summe aufgehen, welches man

also

also durch Versuche bestimmen müßte; sie geht aber auch nicht in dem Zähler der Summe auf, wie sogleich aus [VIII. Kap. 17. B] erhellet, folglich läßt sich der Bruch nicht aufheben.

Der Grund hiervon liegt darin, daß 1) man voraussetzt, die gegebenen Brüche seyen schon in den kleinsten Zahlen ausgedrückt; 2) daß, wenn kein Factor eines Products aus zween oder mehrern Factoren, die alle ganze Zahlen sind, von irgend einer absoluten Primzahl gemessen wird, das Product selbst nicht von ihr nach [VIII. Kap. 5. Zus. und 16. 3) Zus.] gemessen wird; 3) daß, wenn alle Theile einer Summe von irgend einer Größe gemessen werden, einen einzigen ausgenommen, der nicht davon gemessen wird, die Summe selbst nicht von dieser Größe gemessen wird.

3) Zusatz. Geht aber der Zähler der Summe durch eine der absoluten Primzahlen, welche im Nenner als Factoren vorkommen, auf, so kann man Zähler und Nenner durch diese Zahl dividiren, und so den Bruch in kleinern Zahlen ausdrücken; man drücke auf diese Art den Bruch so lange in kleinern Zahlen aus, bis es nicht mehr angeht; dann erst steht der Bruch in seiner kleinsten Gestalt.

15. Aufgabe. Eigentliche Brüche von verschiedenen Nennern zu subtrahiren.

Auflösung.

Man bringe sie beyde nach (13.) auf einerley Nenner, und subtrahire die herauskommenden Zähler von einander. Ein Bruch, dessen Zähler die herauskommende Differenz, und dessen Nenner der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist, ist die verlangte Differenz.

Beweis

Ist in (7) enthalten.

1) Beyspiel. Man sucht $\frac{11}{28} - \frac{17}{72}$.

$$28 = 2^2 . 7$$
$$72 = 2^3 . 3^2$$

also $2^3 . 3^2 . 7 = 8.9.7 = 504$ der gemeinschaftliche Nenner.

$$\begin{array}{l} 28)504\,|\,\frac{18}{198}(11 \\ \quad 28 \\ \quad \overline{224} \\ \quad 224 \\ \quad \overline{\quad 0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 72)504\,|\,\frac{7}{119}(17 \\ \quad \underline{504} \\ \quad\quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 198 \\ \underline{119} \\ 79 \end{array}$$

also

$$\frac{11}{28} - \frac{17}{72} = \frac{198}{504} - \frac{119}{504} = \frac{79}{504}$$

2) Beyspiel. Man sucht $\frac{113}{560} - \frac{135}{784}$

$$560 = 2^4 . 5 . 7$$
$$784 = 2^4 . 7^2$$

also $2^4 . 5 . 7^2 = 16.5.49 = 3920$ der gem. Nenner.

$$\begin{array}{l} 560)3920\,|\,\frac{7}{791}(113 \\ \quad\; \underline{3920} \\ \quad\quad\; 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 784)3920\,|\,\frac{5}{675}(135 \\ \quad\; \underline{3920} \\ \quad\quad\; 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 791 \\ \underline{675} \\ 116 \end{array}$$

also

$$\frac{113}{560} - \frac{135}{784} = \frac{791}{3920} - \frac{675}{3920} = \frac{116}{3920} = \frac{29}{980}$$

1) Zusatz. In Ansehung des Ausdrückens der Brüche in kleinern Zahlen gilt dieselbe Regel wie in [14. 2) Zus.]

2) Zusatz. Stehen bey den Brüchen noch ganze Zahlen, so zieht man diese besonders von einander ab, und hängt an die ganze Zahl, welche den Unterschied giebt, noch den eigentlichen Bruch an, der der Unterschied der eigentlichen Brüche ist. So ist z. B.

$$34\tfrac{11}{20} - 19\tfrac{5}{27} = 15\tfrac{197}{540}$$

weil $34 - 19 = 15$, und $\frac{11}{20} - \frac{5}{27} = \frac{197}{540}$.

3) Zusatz. Wäre aber in diesem Falle der bey dem Minuend befindliche eigentliche Bruch kleiner als der bey dem Subtrahend befindliche, so muß man den bey dem Minuend befindlichen Bruch um einen Bruch, dessen Zähler und Nenner der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist, [der nach (4) also = 1 ist] vermehren, dann erst den im Subtrahend befindlichen Bruch davon abziehen, und hierauf die im Subtrahend befindliche ganze Zahl, welche um 1 größer gedacht wird, welches man durch einen daneben gesetzten Punct andeuten kann, von der im Minuend befindlichen ganzen Zahl abziehen.

Beyspiel. Man sucht $3972\frac{17}{96} - 547\frac{71}{84}$.

$$96 = 2^5 . 3$$
$$84 = 2^2 . 3 . 7$$

also $2^5 . 3 . 7 = 672$ der gemeinschaftliche Nenner.

$$96)672\,|\,\frac{7}{119}(17 \qquad 84)672\,|\,\frac{8}{568}(71$$
$$\underline{672} \qquad\qquad \underline{672}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

	119
	672
3972	791
547.	568
3424	223

also $3972\frac{17}{96} - 547\frac{71}{84} = 3424\frac{223}{672}$.

denn $\frac{568}{672} + \frac{223}{672} + \frac{791}{672} + \frac{672}{672} + \frac{119}{672}$

$1 + 547 + 3424 = 3972$

folglich, weil $\frac{672}{672} = 1$, auch

$$547\frac{568}{672} + 3424\frac{223}{672} = 3972\frac{119}{672}$$

mithin $3424\frac{223}{672} = 3972\frac{119}{672} - 547\frac{568}{672}$
$= 3972\frac{17}{96} - 547\frac{71}{84}$

4) Zusatz. Käme blos im Minuend, nicht aber im Subtrahend, ein Bruch vor, so ziehe man die ganze Zahl des Subtrahends von der ganzen Zahl des Minuends ab, und lasse

lasse den Bruch des Minuends ungeändert So ist z. B. $18\frac{3}{7} - 14 = 4\frac{3}{7}$, weil $18 - 14 = 4$.

5) Zusatz. Käme blos im Subtrahend, nicht aber im Minuend, ein Bruch vor, so ziehe man von dem Nenner des im Subtrahend vorkommenden Bruchs den Zähler desselben Bruches ab. Der Ueberrest ist der Zähler eines Bruches, dessen Nenner mit dem Nenner des gegebenen Bruches einerley ist, und der an eine ganze Zahl angehängt, welche entsteht, wenn von dem Minuend die um 1 vermehrt gedachte ganze Zahl des Subtrahends abgezogen wird, den verlangten Rest giebt.

Beyspiel. $7735 - 4839\frac{127}{279} = 2895\frac{152}{279}$,

weil $279 - 127 = 152$ und $7735 - 4840 = 2895$.

Denn da $\frac{127}{279} + \frac{152}{279} = \frac{279}{279} = 1$, und

$$1 + 4839 + 2895 = 7735,$$

so ist auch

$$4839\frac{127}{279} + 2895\frac{152}{279} = 7735,$$

woraus die Richtigkeit der gegebenen Auflösung erhellet.

16. Bemerkung. In [V. Kap. 12. 3) Zus. VII] ist gezeigt worden, daß, wenn B eine Größe jeder Art, m eine unbenannte ganze Zahl, und k eine andere, in welcher m aufgeht, bedeutet, dann

$$(k:m).B = k.(B:m)$$

Nun ist nach (8. 4) Zus.) oder auch, weil m in k aufgeht, (nach 6. 1) Zus.

$$k:m = \frac{k}{m}$$

also

$$\frac{k}{m}.B = k.(B:m)$$

oder

oder wörtlich: Das Product, das entsteht, wenn eine Größe jeder Art B als Multiplicand mit einem Bruche $\frac{k}{m}$ als Multiplicator multiplicirt wird, wird gefunden, wenn man den Multiplicand B durch den Nenner m des Bruches dividirt, und den herauskommenden Quotienten mit dem Zähler k desselben multiplicirt. Um zu untersuchen, ob diese Gleichung auch mit Beseitigung der Voraussetzung, daß m in k aufgeht, wahr sey, oder um zu untersuchen, ob z. B. die Gleichung

$$\tfrac{3}{5}.B = 3.(B:5)$$

richtig ist, muß zuerst ausgemacht werden, was es heiße, eine Größe mit einem Bruche, der nicht vollkommen einer ganzen Zahl gleich ist, wie hier mit $\frac{3}{5}$, zu multipliciren oder was man unter Producten, deren Multiplicator ein solcher Bruch ist, zu verstehen habe. Nach der oben in (Einl. 15) gegebenen Erklärung von Multiplication kann man dieses nicht abnehmen; es scheint vielmehr, als wenn der Multiplicator allemal eine ganze Zahl seyn müßte, und dergleichen Producte gar nicht statt finden könnten; und in der That, wenn wir bey dieser Definition stehen bleiben, und sie nicht erweitern, muß auch der Multiplicator nothwendig eine ganze Zahl seyn. Die obige Gleichung

$$\frac{k}{m}.B = k.(B:m)$$

nun kann uns veranlassen zu untersuchen, ob es erlaubt sey, sie, oder den von ihr oben gegebenen wörtlichen Ausdruck als Erklärung festzusetzen, was man unter Producten mit gebrochenen Multiplicatoren zu verstehen habe. Soll aber dieses erlaubt seyn, so darf erstens diese Definition der in der Einleitung gegebenen nicht widersprechen, oder sie nicht aufheben, sondern blos erweitern; nämlich wenn der Bruch $\frac{k}{m}$ voll-

vollkommen einer ganzen Zahl gleich ist, mithin das Product $\frac{k}{m}.B$ schon nach der ersten Definition bestimmt ist, so muß die neue Definition eben das Product geben. Dies ist aber in der That der Fall; denn wenn $\frac{k}{m}$ vollkommen einer ganzen Zahl gleich ist, so geht m in k auf, und für diesen Fall ist die Richtigkeit der Gleichung gleich anfangs dargethan worden. Weil aber auch nach (10. und den zugehörigen Zusätzen) jeder Bruch ohne Aenderung seines Werthes auf sehr mannichfaltige Art ausgedrückt werden kann, so muß, wenn es erlaubt seyn soll, die gedachte Definition aufzustellen, auch zweytens die nach selbiger geschehene Multiplication eines Multiplicands M mit zween zwar verschieden ausgedrückten, am Werthe aber gleichen Brüchen doch einerley Product geben, oder es muß, wenn $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, auch $b.[M:a] = d.[M:c]$ seyn. Daß dies aber in der That der Fall sey, läßt sich so zeigen: Wenn $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist nach [10. 3) Zus.] $b.c = d.a$, folglich nach der Gleichung in (V. Kap. 12. 6) Zus. XIII)

$$b.[M:a] = (b.c).[M:(a.c)] = (d.a).[M:(c.a)] = d.[M:c]$$

Wir können also diese gedachte Definition sicher aufstellen, denn wir heben dadurch die erste Definition nicht auf, sondern erweitern sie blos, daß nun auch Producte mit gebrochenen Multiplicatoren statt finden können, welches im Gegentheile, wenn man blos bey der ersten Definition stehen bleiben wollte, wie schon oben bemerkt worden, gar nicht seyn könnte. Es ist demnach die Gleichung

$$\frac{k}{m}.B = k.(B:m)$$

auch

auch richtig, wenn die ganze Zahl m nicht in der ganzen Zahl k aufgeht.

1) Zusatz. Nach [V. Kap. 11. 2) Zus.] ist

$$k.(B:m) = (k.B):m$$

also auch

$$\frac{k}{m}.B = (k.B):m$$

das heißt: Um eine Größe mit einem Bruche zu multipliciren, kann man sie zuerst mit dem Zähler multipliciren, und das herauskommende Product durch den Nenner dividiren.

2) Zusatz. Nun läßt sich auch einsehen, was es heiße, eine Größe durch einen gebrochenen Divisor dividiren. Denn legt man die obige Definition der Division in (Einl. 16) zum Grunde, so können nach selbiger, da Producte mit gebrochenen Multiplicatoren statt finden können, auch Producte mit gebrochenen Divisoren statt finden. Um aber noch genauer zu untersuchen, was es heiße, eine Größe durch einen Bruch zu dividiren, so bezeichne man den Quotienten, der entsteht, wenn der allgemeine Dividend D durch den Bruch $\frac{k}{m}$ dividirt wird, durch Q, oder setze

$$D:\frac{k}{m} = Q$$

so ist

$$D = \frac{k}{m}.Q = k.(Q:m)$$

also nach [V. Kap. 10. I]

$$D:k = Q:m$$

und nach [ebend. II]

$$m.(D:k) = Q$$

also

also $D : \frac{k}{m} = m.(D:k) = (m.D):k = \frac{m}{k}.D$

oder wörtlich: Eine Größe wird durch einen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

3) Zusatz. Ist bey einem Producte der Multiplicator ein eigentlicher Bruch, (siehe 3. Zus.) so ist das Product allemal kleiner als der Multiplicand; und ist bey einem Quotienten der Divisor ein eigentlicher Bruch, so ist der Quotient allemal größer als der Dividend. Das Gegentheil findet statt, wenn der Multiplicator oder Divisor ein uneigentlicher Bruch, oder eine ganze Zahl größer als 1 ist.

4) Zusatz. Das Product eines Bruches in seinen Nenner ist allemal dem Zähler gleich. Ist der Bruch der Multiplicand, so ist die Sache oben (8. 3) Zus.) erwiesen worden. Die Behauptung ist aber auch richtig, wenn der Bruch der Multiplicator ist, denn $\frac{k}{m}.m = k.(m:m) = k.1 = k$. Es ist derowegen m in k sovielmal enthalten, als der Bruch $\frac{k}{m}$ anzeigt, folglich auch nach der andern Definition von Division [V. Kap. 8. 1) Zus.] wenn k der Dividend und m der Divisor, ist $\frac{k}{m}$ der Quotient, so wie er es ebenfalls nach der ersten war, mithin, was in [ebend. 2) Zus.] noch unbestimmt gelassen werden mußte, entschieden. Es ist daher der vollständige Quotient des Exempels (VI. Kap. 13 Zus.) $285\frac{5}{7}$ und des Exempels [ebend. 14. 2) Beyspiel] $14\frac{51766}{74239} = 14\frac{4706}{6749}$. Bezeichnen wir übrigens die Quotienten, bey denen die andere Definition der Division zum Grunde liegt, dadurch, daß man statt des Colons das Zeichen des Semicolons braucht, oder verstehen wir unter A;B die unbenannte Zahl, welche anzeigt, wievielmal die Größe

B

B in der gleichartigen A enthalten ist, oder mit welcher als Multiplicator B als Multiplicand multiplicirt werden muß, um A hervorzubringen, so ist nun bewiesen worden, daß allemal, wenn m und k ganze Zahlen bedeuten,

$$k:m = k;m = \frac{k}{m}$$

5) Zusatz. Die Gleichungen [V. Kap. 3) Zus. VII, VIII, 4) Zus. X, 5) Zus. XII]

$$k.(B:m) = (k:m).B$$
$$(n.B):k = B:(k:n)$$
$$m.(C:k) = C:(k:m)$$
$$(k.A):n = (k:n).A$$

sind also auch dann alle wahr, wenn die darin vorkommenden Quotienten ganzer Zahlen k:m und k:n auch nicht ganze Zahlen sind, und man könnte statt selbiger nach vorigem Zusatze auch k;m, k;n schreiben.

6) Zusatz. Bedeuten k, m, l ganze Zahlen, so ist

$$\frac{k}{m}.l = k.(l:m)$$

oder nach [8. 4) Zus.] $= k.\frac{l}{m}$

oder nach (ebend.) $= \frac{k.l}{m}$

$$= l.\frac{k}{m}$$

Man kann also auch bey Producten, wo ein Factor ein Bruch, und der andere eine ganze Zahl ist, ohne ihren Werth zu ändern, Multiplicator und Multiplicand verwechseln; folglich gelten die in [8. ebend. 1) und 2) Zus.] und (12.) gegebenen Regeln auch umgekehrt, wenn der Multiplicand die ganze Zahl und der Multiplicator der Bruch ist.

7)

7) Zusatz. Unter eben der Voraussetzung, daß k, l, m ganze Zahlen sind, ist nach vorigem Zusatze

$$\frac{k}{l.m}.l = l.\frac{k}{l.m}$$

oder nach (8) $$= \frac{l.k}{l.m}$$

oder nach (10.) $$= \frac{k}{m}$$

also $\frac{k}{l.m} = \frac{k}{m}$; $l = \frac{k}{m} : l$, das heißt, es kommt einerley Quotient heraus, ob ein Bruch durch eine ganze Zahl nach der ersten oder andern Definition der Division dividirt wird; folglich gelten die in (9. und 11. nebst zugehörigen Zusätzen) gegebenen Regeln zur Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl auch nach der zweyten Definition von Division.

8) Zusatz. Soll der Bruch $\frac{3}{7}$ als Multiplicand mit $\frac{5}{8}$ als Multiplicator multiplicirt werden, so findet sich

$$\tfrac{5}{8}.\tfrac{3}{7} = 5.(\tfrac{3}{7}:8)$$

oder nach (11.) $$= 5.\tfrac{3}{8.7}$$

oder nach (8) $$= \tfrac{5.3}{8.7} = \tfrac{15}{56}$$

Es ist demnach das Product zweener gegebenen Brüche gleich einem Bruche, dessen Zähler das Product der Zähler, und dessen Nenner das Product der Nenner der beyden gegebenen Brüche ist.

9) Zusatz. Verwechselt man Multiplicand und Multiplicator, so findet sich umgekehrt $\frac{3}{7}.\frac{5}{8}$ ebenfalls $= \frac{15}{56}$, es ist demnach $\frac{5}{8}.\frac{3}{7} = \frac{3}{7}.\frac{5}{8}$, oder auch, wenn beyde Factoren unbenannte Brüche sind, kann man Multiplicator und Multiplicand, ohne das Product zu ändern, verwechseln, und ein Product zweener Brüche ist vollkommen gegeben, wenn beyde Factoren gegeben sind, ohne daß es nöthig ist zu bestimmen,

wel-

welcher von beyden Factoren der Multiplicator, und welcher der Multiplicand seyn soll.

10) Zusatz. Sind beyde Factoren eigentliche Brüche, so ist das Product kleiner als jeder Factor, nach 3) Zus.

11) Zusatz. Ein Product aus mehrern Factoren, die alle Brüche sind, wird gefunden, wenn man alle Zähler und Nenner mit einander multiplicirt; z. B.

$$\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{11}{17}\cdot\tfrac{19}{29} = \frac{3\cdot5\cdot11\cdot19}{8\cdot7\cdot17\cdot29} = \tfrac{3135}{27608}$$

12) Zusatz. Um einen Bruch zu einer Potenz zu erheben, muß man Zähler und Nenner zu eben der Potenz erheben; z. B.

$$(\tfrac{3}{7})^4 = \frac{3^4}{7^4}$$

denn

$$(\tfrac{3}{7})^4 = \tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{3}{7} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{7\cdot7\cdot7\cdot7} = \frac{3^4}{7^4} = \tfrac{81}{2401}$$

13) Zusatz. Umgekehrt um aus einem gegebenen Bruche die Wurzel irgend eines Grades auszuziehen, muß man sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel des nämlichen Grades ausziehen. So ist z. B.

$$\sqrt[4]{\tfrac{81}{2401}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{2401}} = \tfrac{3}{7}$$

jedoch sieht man dies jetzt nur für den Fall ein, wenn es wirklich ganze Zahlen giebt, welche zu der Potenz erhoben, als der Grad der Wurzel anzeigt, den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches geben.

5) Zusatz. Ist der eine Factor ein eigentlicher Bruch, und der andere eine ganze Zahl nebst einem angehängten eigentlichen Bruche, so richte man entweder den andern Factor ein, und verfahre dann nach 8) Zus., oder man nehme den ersten Factor für den Multiplicator an, und verfahre nach 1) Zus.

1) Bey-

1) Beyspiel. Man sucht $\frac{3}{16} \cdot 4\frac{11}{17}$, so findet man nach der ersten Art

$$\frac{3}{16} \cdot 4\frac{11}{17} = \frac{3}{16} \cdot \frac{79}{17} = \frac{237}{272}$$

2) Beyspiel. Man sucht $\frac{19}{23} \cdot 4538\frac{6}{11}$, so hat man nach der ersten Art

$$\frac{19}{23} \cdot 4538\frac{6}{11} = \frac{19}{23} \cdot \frac{49924}{11} = \frac{948556}{243} = 3749\frac{50}{253};$$

nach der andern aber verfährt man folgendergestalt: Man berechnet erstens

$19 \cdot 4538\frac{6}{11}$ nach [8. 2) Zus.] und findet es $= 86232\frac{4}{11}$, dann aber

$86232\frac{4}{11} : 23$ nach [11. 3) Zus.]

und findet $3749\frac{50}{253}$, welches der gesuchte Quotient ist. Ist das Umgekehrte des ersten Factors (wie beym ersten Beyspiele) größer als der zweyte, so ist allemal die erste Art vortheilhafter, im andern Falle aber scheint die zweyte besser zu seyn.

15) Zusatz. Wenn beyde Factoren aus einer ganzen Zahl nebst einem angehängten eigentlichen Bruche bestehen, so richte man beyde nach [6. 2) Zus.] ein, und verfahre dann nach 8) Zus.

Beyspiel. Man sucht $13\frac{5}{9} \cdot 29\frac{18}{31}$, so findet man

$$13\frac{5}{9} \cdot 29\frac{18}{31} = \frac{122}{9} \cdot \frac{917}{31} \text{ nach [6. 2) Zus.]}$$
$$= \frac{111874}{279} \text{ nach 8) Zus.}$$
$$= 400\frac{274}{279} \text{ nach [6. 3) Zus.]}$$

17. Aufgabe. Einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren.

Auflösung.

Der Quotient ist ein Bruch, dessen Zähler das Product aus dem Zähler des Dividends in den Nenner des Divisors,

und dessen Nenner das Product aus dem Nenner des Dividends in den Zähler des Divisors ist. Z. B.

$$\frac{7}{11} : \frac{5}{13} = \frac{7}{11} ; \frac{5}{13} = \frac{7.13}{5.11} = \frac{91}{55} = 1\frac{36}{55}.$$

Beweis.

$$\frac{7.13}{5.11} \cdot \frac{5}{13} = \frac{5}{13} \cdot \frac{7.13}{5.11} = \frac{5.7.13}{13.5.11} = \frac{7}{11}$$

nach (16. 8) Zus. und 10.) also

$$\frac{7.13}{5.11} = \frac{7}{11} : \frac{5}{13} = \frac{7}{11} ; \frac{5}{13}$$

1) Zusatz. Es kommt demnach, auch wenn Dividend und Divisor zugleich Brüche sind, allemal einerley Quotient heraus, man mag die eine oder andere Definition von Division zum Grunde legen. Da nun nach (6. 1) Zus.) alles, was von Brüchen im Allgemeinen gilt, auch für ganze Zahlen richtig ist, so gilt dieses auch, wenn der Dividend eine ganze Zahl und blos der Divisor ein Bruch ist, wie wenn z. B. $4 : \frac{3}{7}$ gesucht wird. Man findet hier

$$4 : \tfrac{3}{7} = (7.4) : 3 \text{ [nach 16. 2) Zus.]}$$
$$= \frac{7.4}{3} \text{ nach [8. 4) Zus.]}$$
$$= \frac{28}{3} = 9\tfrac{1}{3}$$

also ist in diesem Falle der Quotient ein Bruch, dessen Zähler das Product aus dem Dividend in den Nenner des Divisors, und dessen Nenner der Zähler des Divisors ist. Daß dieses der richtige Quotient ist, kann man auch so einsehen: Nach [16. 8) Zus.] und [6. 1) Zus.] ist

$$\frac{7.4}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7.4}{3} = \frac{3.7.4}{7.3} = 4$$

also $\frac{7.4}{3} = 4 ; \frac{3}{7} = 4 : \frac{3}{7}$.

2) Zusatz. Wenn sich der Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors, und der Nenner des Dividends durch den Nenner des Divisors ohne Rest dividiren läßt, so ist der Quotient gleich einem Bruche, dessen Zähler dem Quotien-

tienten der Zähler, und dessen Nenner dem Quotienten der Nenner gleich ist. Z. B.

$$\frac{27}{35} : \frac{3}{7} = \frac{27}{35} : \frac{3}{7} = \frac{27:3}{35:7} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

Der Beweis folgt aus [16. 8) Zus.]

3) Zusatz. Ist der Divisor eine ganze Zahl nebst einem angehängten eigentlichen Bruche, so muß man ihn erst einrichten. Diese und die vorigen Regeln sind hinreichend, um alle die mannichfaltigen Fälle, die bey der Division der Brüche vorkommen können, aufzulösen, und wir brauchen dabey die beyden Definitionen der Division nicht mehr zu unterscheiden.

Beyspiele.

$\frac{5}{8} : \frac{8}{7} = \frac{35}{64}$

$\frac{13}{17} : \frac{4}{11} = \frac{143}{68} = 2\frac{7}{68}$

$\frac{8}{11} : 4\frac{6}{13} = \frac{8}{11} : \frac{58}{13} = \frac{104}{638} = \frac{52}{319}$

$2\frac{3}{8} : 5\frac{7}{11} = \frac{19}{8} : \frac{62}{11} = \frac{209}{496}$

$8\frac{3}{11} : \frac{4}{7} = \frac{7}{4} \cdot 8\frac{3}{11} = 14\frac{21}{44}$ nach (16. 2) Zus. und 15) Zus.)

$11\frac{5}{13} : 2\frac{17}{29} = 11\frac{5}{13} : \frac{75}{29} = \frac{29}{75} \cdot 11\frac{5}{13} = 4\frac{302}{975}$ nach (16. 2) Zus. und 14) Zus.)

$6 : \frac{17}{31} = \frac{186}{17} = 10\frac{16}{17}$ nach 1) Zus.

$8 : 3\frac{15}{29} = 8 : \frac{102}{29} = \frac{232}{102} = 2\frac{28}{102} = 2\frac{14}{51}$ nach 1) Zus.

$7 : 11\frac{8}{29} = 7 : \frac{327}{29} = \frac{203}{327}$ nach 1) Zus.

18. Erklärung. Wenn bey einem Bruche entweder der Zähler, oder der Nenner, oder beyde zugleich Brüche sind, so heißt er ein Bruchsbruch; so sind z. B. $\frac{\frac{3}{2}}{7}$, $\frac{4}{\frac{29}{6}}$, $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}}$ Bruchsbrüche.

1) Zusatz. Die Bedeutung eines Bruchsbruches ergiebt sich aus (2. Zus.); der Bruchsbruch $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}}$ bedeutet nämlich

das $\frac{3}{2}$fache einer Größe, die $\frac{17}{6}$mal genommen die Einheit giebt. Da nun $\frac{17}{6} \cdot \frac{6}{17} = 1$, so ist der Bruch $\frac{6}{17}$ die Größe, welche $\frac{17}{6}$mal genommen die Einheit giebt; also bedeutet der Bruchsbruch $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}}$ das $\frac{3}{2}$fache von $\frac{6}{17}$, und es ist $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{17} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 17} = \frac{18}{34} = \frac{9}{17}$. Es ist aber auch $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{17} = \frac{6}{17} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} : \frac{17}{6}$, man kann also auch einen Bruchsbruch dadurch, daß man den Zähler durch den Nenner dividirt, in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln, wo Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Die im 3) Zus. von (8.) enthaltene Wahrheit, daß ein Bruch gleich einem Quotienten sey, dessen Dividend dem Zähler, und dessen Divisor dem Nenner gleich ist, gilt demnach auch für einen Bruchsbruch, oder wenn Divisor und Dividend auch Brüche sind. Eben so ist $\frac{\frac{3}{2}}{7} = \frac{3}{2} : 7 = \frac{3}{14}$ und $\frac{4}{\frac{29}{6}} = 4 : \frac{29}{6} = \frac{24}{29}$.

2) Zusatz. Da ein Thaler 24 Groschen, und ein Gulden 16 Groschen enthält, so ist ein Gulden $\frac{16}{24}$ oder $\frac{2}{3}$ eines Thalers. Man kann also auch schließen: Da ein Friedrichsd'or $5\frac{1}{3}$ Thaler, und ein Laubthaler $1\frac{1}{2}$ Thaler enthält, so ist ein Laubthaler $\frac{1\frac{1}{2}}{5\frac{1}{3}}$ oder $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{16}{3}}$ oder $\frac{9}{32}$ eines Friedrichsd'or. Dies zeigt, daß man bey ganz gewöhnlichen Rechnungen auf Bruchsbrüche kommen kann.

3) Zusatz. Jeder eigentliche Bruch kann durch einen Bruchsbruch ausgedrückt werden, dessen Zähler 1 ist, und dessen Nenner der uneigentliche Bruch ist, welcher entsteht, wenn man den Nenner durch den Zähler dividirt; z. B. $\frac{7}{16} = \frac{1}{16:7} = \frac{1}{2+\frac{2}{7}}$; denn $\frac{1}{2+\frac{2}{7}} = \frac{1}{\frac{16}{7}} = 1 : \frac{16}{7} = \frac{7}{16}$. Aus

eben

eben dem Grunde ist auch $\frac{2}{7} = \frac{1}{3+\frac{1}{2}}$, folglich $\frac{7}{16} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}$.

Eben so ist

$$\frac{27}{103} = \frac{1}{3+\frac{22}{27}},\ \frac{22}{27} = \frac{1}{1+\frac{5}{22}},\ \frac{5}{22} = \frac{1}{4+\frac{2}{5}},\ \frac{2}{5} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}},$$

also

$$\frac{27}{103} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$$

Ein solcher Ausdruck heißt ein zusammenhängender Bruch, oder ein Kettenbruch. Hier wird nur von solchen Kettenbrüchen gehandelt, wo alle Zähler, wie bey dem angeführten Beyspiele, 1 sind. Hieraus ergiebt sich die Auflösung der folgenden Aufgabe.

19. Aufgabe. Einen auf die gewöhnliche Art geschriebenen eigentlichen Bruch durch einen Kettenbruch auszudrücken.

Auflösung.

Man mache mit dem Zähler und Nenner desselben die Rechnung ⊙ im (VIII. Kap. 22). Die herauskommenden Quotienten sind die ganzen Zahlen, welche in den Nennern des Kettenbruchs vorkommen.

Beyspiel. Der gegebene Bruch sey $\frac{474}{1297}$.

⊙

$$
\begin{array}{r|r|l}
474) & 1297 & 2 \\
 & 948 & \\ \hline
 & 349 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
474 & 1 \\
349 & \\ \hline
125 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
349 & 2 \\
250 & \\ \hline
99 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
125 & 1 \\
99 & \\ \hline
26 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
99 & 3 \\
78 & \\ \hline
21 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
26 & 1 \\
21 & \\ \hline
5 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
21 & 4 \\
20 & \\ \hline
1 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
5 & 5 \\
5 & \\ \hline
0 & \\
\end{array}
$$

also $\frac{474}{1297} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}}}}}$

Beweis.

Nach der Rechnung ⊙ und (18. 3) Zus.) ist

$$\tfrac{474}{1297} = \frac{1}{2+\frac{349}{474}},\quad \tfrac{349}{474} = \frac{1}{1+\frac{125}{349}},\quad \tfrac{125}{349} = \frac{1}{2+\frac{99}{125}},$$

$$\tfrac{99}{125} = \frac{1}{1+\frac{26}{99}},\quad \tfrac{26}{99} = \frac{1}{3+\frac{21}{26}},\quad \tfrac{21}{26} = \frac{1}{1+\frac{5}{21}},\quad \tfrac{5}{21} = \frac{1}{4+\frac{1}{5}},$$

woraus die Sache erhellet.

1) Zusatz. Der letzte Bruch $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+\frac{1}{1}}$, also kann der gegebene Bruch $\frac{474}{1297}$ auch so durch einen Kettenbruch ausgedrückt werden:

$$\tfrac{474}{1297} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{1}}}}}}}}}$$

Man übersieht dies auch daraus, daß man die Rechnung ☉ auch so hätte enden können:

$$\begin{array}{llllllll}
21 & 26 & 1 & & & & & \\
 & 21 & & & & & & \\
 & 5 & 21 & 4 & & & & \\
 & & 20 & & & & & \\
 & & 1 & 5 & 4 & & & \\
 & & & 4 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

2) Zusatz. Wäre der letzte Divisor der Rechnung ⊙ nicht 1, mithin [VIII. Kap. 22. 3) Zus.] Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs nicht relative Primzahlen, so wäre er nicht in den kleinsten Zahlen ausgedrückt gegeben. Die übrigen Schlüsse bleiben aber ungeändert.

20. Aufgabe. Einen gegebenen Kettenbruch durch einen auf die gewöhnliche Art geschriebenen Bruch in den kleinsten Zahlen auszudrücken.

Auflösung.

Man schreibe alle in den Nennern vorkommende ganze Zahlen neben einander, und mache mit ihnen die Rechnung ☽ in [VIII. Kap. 22. 4) Zus.]; die beyden am weitesten zur Linken stehenden Zahlen sind der Zähler und Nenner des verlangten Bruches.

Beyspiel. Der gegebene Kettenbruch sey

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\frac{1}{6}}}}}}}$$

☽	3,	4,	2,	1,	7,	4,	6	
	8327,	2578,	593,	206,	181,	25,	6,	1, 0

Der in den kleinsten Zahlen ausgedrückte Bruch $\frac{2578}{8327}$ ist also dem gegebenen Kettenbruche gleich.

Beweis.

Nach der Rechnung ☽ ist

8327

$$\begin{aligned}
8327 &= 3.2578 + 593\\
2578 &= 4.\ 593 + 206\\
593 &= 2.\ 206 + 181\\
206 &= 1.\ 181 + 25\\
181 &= 7.\ \ 25 + 6\\
25 &= 4.\ \ \ 6 + 1\\
6 &= 6.\ \ \ 1 + 0
\end{aligned}$$

Macht man also mit den beyden Zahlen 2578 und 8327 die Rechnung ⊙ (VIII. Kap. 22.)

```
⊙   2578|8327|3
        |7734|
         ----
          593|2578|4
             |2372|
              ----
               206|593|2
                  |412|
                   ---
                   181|206|1
                      |181|
                       ---
                        25|181|7
                          |175|
                           ---
                             6|25|4
                              |24|
                               --
                                1|6|6
                                 |6|
                                  -
                                  0
```

so kommen nach der Reihe die in den Nennern vorkommenden ganzen Zahlen als Quotienten heraus, und der letzte Divisor ist 1; also ist nach (19) der Bruch $\frac{2578}{8327}$ dem gegebenen Kettenbruche gleich, und nach [VIII. Kap. 22. 3) Zus.] Zähler und Nenner desselben relative Primzahlen, folglich ist er [10. 8) Zus.] in den kleinsten Zahlen ausgedrückt.

1) Zusatz. Nach dem gegebenen Beweise kommen die in den Nennern vorkommenden ganzen Zahlen als Quotien-

tienten heraus, wenn man mit dem Zähler und Nenner des gefundenen Bruches die Rechnung ⊙ macht, und der letzte Divisor ist 1. Schreibt man also die in den Nennern vorkommenden ganzen Zahlen der Reihe nach neben einander, und macht mit ihnen die Rechnung ♂ [VIII. Kap. 22. 5) Zus.]

			3,	4,	2,	1,	7,	4,	6
♂	1.	0	1.	4	9.	13	100.	413	2578.
	0	1.	3	13.	29	42.	323	1334.	8327

so ist nach [VIII. Kap. 22. 9) Zus.] die letzte Zahl der mittlern Reihe der Zähler, und die letzte Zahl der untern Reihe der Nenner des gefundenen Bruches. Man kann also auch den verlangten Bruch finden, wenn man die in den Nennern vorkommenden ganzen Zahlen der Reihe nach neben einander schreibt, und mit ihnen die Rechnung ♂ macht. Die letzten Zahlen der mittlern und untern Reihe sind der Zähler und Nenner des verlangten Bruches, und wenn man mit ihnen die Rechnung ⊙ macht, so kommen die in den Nennern vorkommenden ganzen Zahlen als Quotienten heraus, und der letzte Divisor ist 1.

2) Zusatz. Eben so sieht man ein, daß die Brüche, welche durch die vorhergehenden geradeüber einander stehenden Zahlen in der mittlern und untern Reihe gebildet werden, die kleinsten Ausdrücke der vorhergehenden Kettenbrüche sind. Es ist nämlich

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3};\ \frac{4}{13}=\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}};\ \frac{9}{29}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}};\ \frac{13}{42}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}}}}$$

$$\frac{100}{323} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}} \qquad \frac{413}{1334} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{4}}}}}}$$

21. Aufgabe. Brüche zu finden, die in kleinern Zahlen ausgedrückt sind als ein gegebener eigentlicher Bruch, und ihm doch nahe kommen.

Auflösung.

1) Man mache mit dem Zähler und Nenner des gegebenen Bruches die Rechnung ⊙, jedoch so, daß der letzte Quotient 1 ist, oder wie in [19. 1) Zus.]

2) Man schreibe die herauskommenden Quotienten ihrer Ordnung nach neben einander, und mache mit ihnen die Rechnung ♂, so wird, wenn man von der Linken nach der Rechten zu geht, der dritte der Brüche, welcher durch gerade über einander stehende Zahlen in der mittlern und untern Reihe gebildet worden, etwas größer, der folgende etwas kleiner, der zunächst folgende wieder etwas größer, und so abwechselnd die folgenden Brüche immer abwechselnd größer und kleiner als der gegebene Bruch seyn. Diejenigen Brüche nämlich, wo der Punkt im Zähler steht, werden größer, und die andern, wo der Punkt im Nenner steht, kleiner als der anfangs gegebene Bruch seyn. Alle diese Brüche sind schon in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, und jeder folgende Bruch ist dem gegebenen Bruche näher als der vorhergehende, und der letzte Bruch dem gegebenen vollkommen gleich, drückt ihn also in den kleinsten Zahlen aus, und entsteht, wenn man den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch den letzten Divisor in ⊙ dividirt.

Bey-

Beyspiel. Der gegebene Bruch sey $\frac{160048}{519085}$.

```
160048|519085|3
      |480144|
      ------------
        38941|160048|4
             |155764|
             -----------
⊙              4284|38941|9
                   |38556|
                   ----------
                     385|4284|11
                        |385.
                        -------
                         434|
                         385|
                        ------
                          49|385|7
                            |343|
                            ------
                              42|49|1
                                |42|
                                -----
                                 7|42|5
                                  |35|
                                  -----
                                   7|7|1
                                    |7|
                                     0
```

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 3, & 4, & 9, & 11, & 7, & 1, & 5, & 1, & \\ \hline ♂ & 1. & 0 & 1. & 4 & 37. & 411 & 2914. & 3325 & 19539. & 22864 \\ & 0 & 1. & 3 & 13. & 120 & 1333. & 9451 & 10784. & 63371 & 74155. \end{array}$$

Die gefundenen Näherungsbrüche sind also

$$\frac{1}{3},\ \frac{4}{13},\ \frac{37}{120},\ \frac{411}{1333},\ \frac{2914}{9451},\ \frac{3325}{10784},\ \frac{19539}{63371},$$

und der letzte Bruch $\frac{22864}{74155}$ ist dem gegebenen vollkommen gleich, drückt ihn in den kleinsten Zahlen aus, und entsteht, wenn Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch den letzten Divisor in ⊙, nämlich 7 dividirt wird.

Beweis.

Beweis.

Nach [VIII. Kap. 22. 5) Zus.] läßt sich jede Divisionszahl in ⊙ durch den Unterschied zwoer Zahlen ausdrücken, wovon die eine ein Vielfaches von b oder von dem Zähler, und die andere ein Vielfaches von a oder von dem Nenner des gegebenen Bruchs ist. Aus denen in ⊙ und ♂ vorkommenden Zahlen hat man nämlich folgende Gleichungen:

$$1.519085 - 3.160048 = 38941$$
$$13.160048 - 4.519085 = 4284$$
$$37.519085 - 120.160048 = 385$$
$$1333.160048 - 411.519085 = 49$$
$$2914.519085 - 9451.160048 = 42$$
$$10784.160048 - 3325.519085 = 7$$
$$19539.519085 - 63371.160048 = 7$$
$$74155.160048 - 22864.519085 = 0$$

also nach (7) und (10)

$$\frac{1}{3} - \frac{160048}{519085} = \frac{38941}{3.519085}$$
$$\frac{160048}{519085} - \frac{4}{13} = \frac{4284}{13.519085}$$
$$\frac{37}{120} - \frac{160048}{519085} = \frac{385}{120.519085}$$
$$\frac{160048}{519085} - \frac{411}{1333} = \frac{49}{1333.519085}$$
$$\frac{2914}{9451} - \frac{160048}{519085} = \frac{42}{9451.519085}$$
$$\frac{160048}{519085} - \frac{3325}{10784} = \frac{7}{10784.519085}$$
$$\frac{19539}{63371} - \frac{160048}{519085} = \frac{7}{63371.519085}$$
$$\frac{160048}{519085} - \frac{22864}{74155} = 0$$

Hieraus erhellet, daß von den Brüchen, welche durch gerade über einander stehende Zahlen der mittlern und untern Reihe in ♂ gebildet werden, der dritte $\frac{1}{3}$ größer, der folgende $\frac{4}{13}$ etwas kleiner, der noch weiter folgende $\frac{37}{120}$ wieder etwas größer, und so die noch weiter zur Rechten folgenden Brüche immer abwechselnd größer und kleiner als der gegebene Bruch $\frac{160048}{519085}$ sind, und da bey den angegebenen Unterschieden die Zähler immer abnehmen, wäh-

während daß die Nenner immer wachsen, so werden sie immer kleiner und kleiner; jeder folgende Näherungsbruch ist dem gegebenen näher als der vorhergehende, und der letzte $\frac{22864}{74155}$ ihm vollkommen gleich. Bey allen diesen Brüchen, welche durch gerade über einander stehende Zahlen der mittlern und untern Reihe von ♂ gebildet werden, sind [VIII. Kap. 22. 6) Zus.] Zähler und Nenner relative Primzahlen, also sind sie [10. 3) Zus.] alle in den kleinsten Zahlen ausgedrückt; der letzte davon also, welcher dem gegebenen Bruche vollkommen gleich ist, kann unmöglich in größern Zahlen ausgedrückt seyn, als der gegebene; und da nach der Natur der Rechnung ♂ die folgenden Zahlen sowohl der mittlern als untern Reihe immer größer und größer werden, so haben alle Näherungsbrüche kleinere Zähler und Nenner als der gegebene Bruch. Daß sie wirklich Näherungsbrüche sind, oder dem gegebenen Bruche sehr nahe kommen, erhellet aus den angegebenen Unterschieden. Daß endlich der letzte Bruch, welcher den gegebenen in den kleinsten Zahlen ausdrückt, auch herauskommt, wenn man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch den letzten Divisor in ☉, welcher hier 7 ist, dividirt, erhellet sowohl aus (10. 8) Zus.] als aus [VIII. Kap. 22. 7) Zus.]

1) Zusatz. Der gegebene Bruch ist nach (19) gleich dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{1}{1}}}}}}}}$$

und

und die Näherungsbrüche

$\frac{1}{3}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{37}{120}$, $\frac{411}{1333}$, $\frac{2914}{9451}$, $\frac{3325}{10784}$, $\frac{19539}{63371}$, $\frac{22864}{74155}$

sind nach [20. 1) Zus.] die kleinsten Ausdrücke der Kettenbrüche

$$\frac{1}{3},\ \cfrac{1}{3+\frac{1}{4}},\ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{9}}},\ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\frac{1}{11}}}},\ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\frac{1}{7}}}}}$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{7+\frac{1}{7}}}}}} \qquad \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}}}}}$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{1}{1}}}}}}}}$$

2) Zusatz. Es giebt keinen Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, der dem gegebenen Bruche $\frac{160048}{519085}$ näher käme, als einer der gefundenen Näherungsbrüche,

brüche, und zugleich einen kleinern Zähler und Nenner hätte. Denn es sey $\frac{\beta}{\alpha}$ ein eigentlicher Bruch, der von allen erhaltenen Näherungsbrüchen verschieden ist. Wenn man mit den Zahlen β und α die Rechnung ⊙ macht, so müssen die herauskommenden Quotienten einmal von den Quotienten, die herauskommen, wenn man mit den Zahlen 160048 und 519085 die Rechnung ⊙ macht (welches in der Auflösung des Beyspiels geschehen ist) abweichen; denn sonst wäre nach (19) der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ einem von den im 1) Zus. angegebenen Kettenbrüchen gleich, also auch einem der gefundenen Näherungsbrüche, welches wider die Voraussetzung ist.

Es mögen also die drey ersten Quotienten, wie bey dem gegebenen Bruche 3, 4, 9 seyn, der vierte aber möge kleiner als 11, nämlich nur 11 — a seyn, wo a eine ganze Zahl kleiner als 11 ist, so sieht der Anfang der Rechnung ⊙ mit den Zahlen β und α also aus:

$$\begin{array}{llll}
\beta \mid \alpha & \mid 3 & & \\
\quad 3.\beta & & & \\
\gamma & \beta \mid 4 & & \\
 & 4.\gamma & & \\
 & \delta & \gamma \mid 9 & \\
 & & 9.\delta & \\
 & & \varepsilon & \delta \mid 11-a \\
 & & & (11-a).\varepsilon \\
 & & & \zeta
\end{array}$$

wo also ζ entweder 0 oder doch kleiner als ε ist. Nach [VIII. Kap. 22. 7) Zus.] ist

$$\alpha = 120.\delta + 13.\varepsilon \text{ und } \beta = 37.\delta + 4.\varepsilon$$

also

also nothwendig $\alpha > 120$ und $\beta > 37$; der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ hat also einen größern Zähler und Nenner als der Näherungsbruch $\frac{37}{120}$, mithin auch als alle vorhergehende.

Nun ist der gegebene Bruch

$$\frac{160048}{519085} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \frac{49}{385}}}}}$$

der folgende Näherungsbruch $\frac{411}{1333} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \frac{1}{11}}}}$

und der Bruch $\frac{\beta}{\alpha} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{(11 - a) + \frac{\zeta}{\varepsilon}}}}}$

Da aber offenbar

$$11 + \frac{49}{385} > 11 > (11 - a) + \frac{\zeta}{\varepsilon}$$

so fällt auch der Näherungsbruch $\frac{411}{1333}$ zwischen den gegebenen Bruch $\frac{160048}{519085}$ und den Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$, also ist derselbe, und noch vielmehr alle folgende dem gegebenen Bruche näher als $\frac{\beta}{\alpha}$.

Man sieht dies auch so ein: Da $\varepsilon > \zeta$ und a eine ganze Zahl ist, so ist auch $a.\varepsilon > \zeta$; nun ist $\zeta = \delta - (11 - a).\varepsilon$, mithin $a.\varepsilon - \zeta = a.\varepsilon - [\delta - (11 - a).\varepsilon]$ $= [a.\varepsilon + (11 - a).\varepsilon] - \delta = 11.\varepsilon - \delta$ nach [III. Kap. 7. 9) Zus. und IIII. Kap. 5]. Nun ist nach [VIII. Kap. 22. 5) Zus.] $\delta = 13.\beta - 4.\alpha$, $\varepsilon = 37.\alpha - 120.\beta$, also $11.\varepsilon = 11.37.\alpha - 11.120.\beta$, und nach [III. Kap. 8. II] $11.\varepsilon - \delta = 411.\alpha - 1333.\beta = a.\varepsilon - \zeta$, mithin auch nach (7.) $\frac{411.\alpha}{1333.\alpha} - \frac{1333.\beta}{1333.\alpha} = \frac{a.\varepsilon - \zeta}{1333.\alpha}$ oder nach (10) $\frac{411}{1333} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a.\varepsilon - \zeta}{1333.\alpha}$ und wie im Satze selbst bewiesen worden, $\frac{160048}{519085} - \frac{411}{1333} = \frac{49}{1333.519085}$, also offenbar der auf den Näherungsbruch $\frac{37}{120}$ (dessen Zähler kleiner als β, und dessen Nenner kleiner als α ist, wie schon bewiesen worden) zunächst folgende $\frac{411}{1333}$ und noch vielmehr alle folgende dem gegebenen Bruche näher, als der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ es ist.

Wären aber, wenn man mit β und α die Rechnung ⊙ macht, die drey ersten Quotienten, wie bey dem gegebenen Bruche 3, 4, 9, der vierte aber größer als 11, oder 11 + b, wo b eine ganze Zahl ist, so sieht der Anfang der Rechnung ⊙ mit den Zahlen β und α also aus:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
\beta & \alpha & 3 & & \\
 & 3.\beta & & & \\
\hline
 & \gamma & \beta & 4 & \\
 & & 4.\gamma & & \\
\hline
 & & \delta & \gamma & 9 \\
 & & & 9.\delta & \\
\hline
 & & & \varepsilon & \delta \quad 11 + b \\
 & & & & (11 + b).\varepsilon \\
\hline
 & & & & \zeta
\end{array}
$$

wo

wo also ζ entweder 0 oder doch kleiner als ε ist. Nach der letzten Division ist $\zeta = \delta - (11 + b).\varepsilon$, also $b.\varepsilon + \zeta = b.\varepsilon + [\delta - (11 + b).\varepsilon] = \delta - [(11 + b).\varepsilon - b.\varepsilon] = \delta - 11.\varepsilon$ nach [III. Kap. 7. 7) Zus. IX, und IIII. Kap. 5. 1) Zus.] Nun ist nach [VIII. Kap. 22. 7) Zus.]

$$\alpha = 120.\delta + 13.\varepsilon \text{ und } \beta = 37.\delta + 4.\varepsilon$$

ferner

$$120.11.\varepsilon = 120.11.\varepsilon \quad 37.11.\varepsilon = 37.11.\varepsilon$$

also

$$\alpha = 1333.\varepsilon + 120.(b.\varepsilon + \zeta), \beta = 411.\varepsilon + 37.(b.\varepsilon + \delta)$$

nach [III. Kap. 7. 2) Zus.] und gewiß $\alpha > 1333$ und $\beta > 411$. Der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ hat also einen größern Zähler und Nenner als der Näherungsbruch $\frac{411}{1333}$, mithin auch als alle vorhergehende.

Nun ist der gegebene Bruch

$$\frac{160048}{519085} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{7 + \frac{42}{49}}}}}}$$

der folgende Näherungsbruch $\frac{2914}{9451} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \frac{1}{7}}}}}$

und der Bruch $\frac{\beta}{\alpha} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{(11+b)+\frac{\zeta}{\varepsilon}}}}}$

Da aber offenbar $11 + b + \frac{\zeta}{\varepsilon} > 11 + \frac{1}{7} > 11 + \cfrac{1}{7+\frac{42}{49}}$ so fällt auch der Näherungsbruch $\frac{2914}{9451}$ zwischen den gegebenen Bruch $\frac{160048}{519085}$ und den Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$, also ist derselbe, und noch vielmehr alle folgende dem gegebenen Bruche näher als $\frac{\beta}{\alpha}$.

Man sieht dies auch so ein: Nach [VIII. Kap. 22. 5) Zus.] ist $\delta = 13.\beta - 4.\alpha$ und $\varepsilon = 37.\alpha - 120.\beta$, also $11.\varepsilon = 11.37.\alpha - 11.120.\beta$, und nach [III. Kap. 8. II] $\delta - 11.\varepsilon = b.\varepsilon + \zeta = 1333.\beta - 411.\alpha$, mithin auch $7.b.\varepsilon + 7.\zeta = 7.1333.\beta - 7.411.\alpha$, und da
$\varepsilon = 37.\alpha - 120.\beta$, auch
$(7.b.\varepsilon + 7.\zeta) - \varepsilon = (7.b.\varepsilon - \varepsilon) + 7.\zeta = 9451.\beta - 2914.\alpha$
nach [III. Kap. 7. 6) Zus. VIII. und 8. II] Hieraus folgt nach (7.)

$$\frac{(7.b.\varepsilon - \varepsilon) + 7.\zeta}{9451.\alpha} = \frac{(7.b - 1).\varepsilon + 7.\zeta}{9451.\alpha} = \frac{9451.\beta}{9451.\alpha} - \frac{2914.\alpha}{9451.\alpha}$$

oder nach (10.)

$$\frac{(7.b - 1).\varepsilon + 7.\zeta}{9451.\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{2914}{9451}$$

und wie im Satze selbst bewiesen worden,

$$\frac{2914}{9451} - \frac{160048}{519085} = \frac{42}{9451.519085}$$

also

also offenbar der auf den Näherungsbruch $\frac{411}{1333}$ (dessen Zähler kleiner als β, und dessen Nenner kleiner als α ist, wie schon bewiesen worden) zunächst folgende $\frac{2014}{9451}$, und noch vielmehr alle folgende dem gegebenen Bruche näher, als der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ es ist.

22. **Bemerkung.** Es ist nöthig und wichtig zu zeigen, daß verschiedene Sätze, deren Wahrheit blos für ganze Zahlen dargethan worden ist, auch wahr verbleiben, wenn man statt der ganzen gebrochene Zahlen setzt.

1) Der Lehrsatz (IIII. Kap. 4.) ist auch wahr, wenn beyde Factoren unbenannte Brüche sind. Der Beweis ist in [16. 9) Zus.] enthalten.

2) Der Lehrsatz [IIII. Kap. 5.] ist auch für Brüche wahr. Denn daß z. B. die Gleichung

$$(\tfrac{13}{56}+\tfrac{7}{88}).A = \tfrac{13}{56}.A + \tfrac{7}{88}.A$$

richtig sey, wo A eine Größe jeder Art, also auch eine unbenannte ganze oder gebrochene Zahl seyn kann, läßt sich so zeigen: Um die Summe der beyden Brüche $\frac{13}{56}$ und $\frac{7}{88}$ zu finden, muß man sie nach (13.) erst auf einerley Nenner bringen, und man findet dann

$$\frac{13}{56}=\frac{13.11}{56.11}=\frac{143}{616} \text{ und } \frac{7}{88}=\frac{7.7}{88.7}=\frac{49}{616}$$

es ist also

$$\frac{13}{56}+\frac{7}{88}=\frac{143+49}{616}=\frac{192}{616}=\frac{192:8}{616:8}=\frac{24}{77}$$

Nun ist nach [IIII. Kap. 5.]

$$143.(A:616)+49.(A:616)=192.(A:616)$$

oder nach (V. Kap. 12. 6) Zus. XIII)

$$13.(A:56)+7.(A:88)=24.(A:77)$$

oder

oder

$$\tfrac{13}{56}.A + \tfrac{7}{88}A = \tfrac{24}{77}.A$$

und eben so ist der Beweis bey drey oder noch mehrern Brüchen.

Daß ferner, wenn A und B gleichartige Größen sind, die Gleichung

$$\tfrac{4}{7}.(A+B) = \tfrac{4}{7}.A+\tfrac{4}{7}.B$$

richtig sey, wird so bewiesen: Nach (6) ist

$$\tfrac{4}{7}.(A+B) = 4.[A+B:7]$$

$$\text{oder nach (V. Kap. 11.)} = 4.[(A:7)+(B:7)]$$

$$\text{oder nach (III. Kap. 5.} = 4.(A:7)+4.(B:7)$$

$$\text{oder nach (16.)} = \tfrac{4}{7}.A + \tfrac{4}{7}.B$$

und eben so ist der Beweis bey drey oder noch mehreren Größen.

Auch der 1) Zusatz ist für Brüche wahr, oder die Gleichungen

$$(k-m).A = k.A - m.A$$

$$m.(C-B) = m.C - m.B$$

auch richtig, wenn k und m unbenannte Brüche sind. Der Beweis ist wie oben.

Auch der 2) Zusatz ist für Brüche wahr, oder die Gleichung

$$(n.m).A = n.(m.A)$$

auch richtig, wenn n und m unbenannte Brüche sind. Denn daß die Gleichung

$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).A = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.A\right)$$

richtig ist, wenn a, b, c, d unbenannte ganze Zahlen, und A eine Größe jeder Art bedeuten, erhellet folgendergestalt:

Man

Man setze a.c = e, b.d = d.b = f, c.b = g und A:f = B, und es ist vermöge [16. 8) Zus.]

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

ferner nach [V. Kap 12. 6) Zus. XIII]

$$c.[A:d] = (c.b).[A:(d.b)] = g.[A:f] = g.B$$

nach [ebend. 5) Zus. XII], weil b in g aufgeht,

$$(c.[A:d]):b = (g.B):b = (g:b).B = c.B$$

und nach [IIII. Kap. 5. 2) Zus.]

$$a.[(c.[A:d]):b.] = a.(c.B) = (a.c).B = e.(A:f)$$

oder nach (16.)

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.A\right) = \frac{e}{f}.A = \left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).A$$

Auch der 3) Zusatz ist für Brüche wahr, oder die Gleichung

$$n.(m.A) = m.(n.A)$$

auch richtig, wenn m und n gebrochene Zahlen sind. Denn man verwechsele in der vorhin erwiesenen die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit einander, so hat man

$$\frac{c}{d}.\left(\frac{a}{b}.A\right) = \left(\frac{c}{d}.\frac{a}{b}\right).A$$

Da nun nach [16. 9) Zus.]

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b}$$

so ist auch

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.A\right) = \frac{c}{d}.\left(\frac{a}{b}.A\right)$$

Auch der 4) Zusatz ist für Brüche wahr, oder die Gleichung

$$(k-m).(C-B) = (k.C+m.B)-(k.B+m.C)$$

auch

auch richtig, wenn k und m gebrochene Zahlen sind. Der Beweis ist wie oben.

3) Die in (IIII. Kap. 11. Zus. und 12. 13. 14. nebst Zusätzen) enthaltenen Sätze gelten auch für Brüche. Der Beweis ist eben so wie dort, da die Wahrheit der Sätze, worauf er sich gründet, in 1) und 2) auch für Brüche dargethan worden.

4) Der Lehrsatz (V. Kap. 10.) nebst seinen Zusätzen ist auch wahr, wenn statt der dort vorkommenden ganzen Zahlen Brüche gesetzt werden. Denn daß die beyden Gleichungen:

$$(\tfrac{4}{7}.M) : \tfrac{4}{7} = M$$
$$\tfrac{4}{7}.(D : \tfrac{4}{7}) = D$$

richtig sind, folgt aus der Allgemeinheit der oben in (Einl. 16.) gegebenen Definition der Division. Die Richtigkeit der in dem 1ten, 2)ten und 3ten Zusatze enthaltenen Sätze auch für Brüche wird eben so wie dort bewiesen, und die im 2) Zusatze enthaltene Gleichung $f:(f:d) = d$, welche wahr ist, wenn f und d Brüche sind, der Quotient $f : d$ mag beschaffen seyn wie er will, ist demnach auch richtig, wenn f und d zwar ganze Zahlen sind, aber d nicht in f aufgeht.

5) Der Lehrsatz [V. Kap. 11.] nebst seinen Zusätzen gilt auch für Brüche. Denn die Richtigkeit der Gleichungen

$$(A + B) : \tfrac{4}{7} = (A : \tfrac{4}{7}) + (B : \tfrac{4}{7})$$
$$(A - B) : \tfrac{4}{7} = (A : \tfrac{4}{7}) - (B : \tfrac{4}{7})$$
$$(\tfrac{3}{4}.A) : \tfrac{5}{7} = \tfrac{3}{4}.(A : \tfrac{5}{7})$$

worin A, B gleichartige Größen jeder Art sind, erhellet daraus, daß sie nach [16. 2) Zus.] einerley mit den schon in 2) erwiesenen Gleichungen

$$\tfrac{7}{4}.(A + B) = \tfrac{7}{4}.A + \tfrac{7}{4} B$$
$$\tfrac{7}{4}.(A - B) = \tfrac{7}{4}.A - \tfrac{7}{4}.B$$
$$\tfrac{7}{5}.(\tfrac{3}{4}.A) = \tfrac{3}{4}.(\tfrac{7}{5}.A)$$

sind.

6)

6) Der Lehrsatz [V. Kap. 12.] nebst allen seinen Zusätzen bleibt auch wahr, wenn statt der dort vorkommenden unbenannten ganzen Zahlen n, m, k, p, d, f, g, h, l, r, q unbenannte Brüche gesetzt werden, und auch ohne die Einschränkung, daß die daben vorkommenden Quotienten unbenannter Zahlen k:m, k:n, g:f, l:h, n:m, r:q ganze Zahlen sind. Der Beweis ist überall eben so wie dort. Es ist also auch nach der Gleichung XII daselbst, wenn k und n Brüche sind,

$$(k.A):n = (k:n).A$$

und nach der Gleichung VIII

$$(k.A):n = A:(n:k)$$

mithin

$$(k:n).A = A:(n:k)$$

So ist z. B.

$$(\tfrac{4}{7}:\tfrac{3}{11}).A = A:(\tfrac{3}{11}:\tfrac{4}{7})$$

oder, welches einerley ist,

$$\tfrac{44}{21}.A = A:\tfrac{21}{44}$$

welches auch durch (16, 2) Zus. bestätigt wird.

7) Die in [VII. Kap. 3. 2) Zus.] enthaltenen Gleichungen gelten auch für Brüche, oder es ist $(\frac{4}{7})^1 = \frac{4}{7}$ und $(\frac{4}{7})^0 = 1$. Der Beweis ist wie oben.

8) Der in (VII. Kap. 8) enthaltene Lehrsatz nebst seinen Zusätzen gilt auch, wenn die Wurzel a ein Bruch ist. Der Beweis ist wie oben.

9) Der in [VII. Kap. 9.] enthaltene Lehrsatz nebst seinen Zusätzen gilt auch, wenn die Zahlen a, b, c Brüche bedeuten. Der Beweis ist wie dort. Die im 1) Zus. enthaltene Gleichung

$$(c:a)^m = c^m:a^m$$

welche wahr ist, wenn c und a Brüche sind, die Quotienten $c:a$ und $c^m:a^m$ mögen beschaffen seyn wie sie wollen, ist

dem.

demnach auch richtig, wenn c und a ganze Zahlen sind, aber a nicht in c aufgeht.

Zieht man ferner Bruchsbrüche in Betrachtung, so läßt sich auch zeigen, daß verschiedene Sätze des gegenwärtigen Kapitels wahr sind, wenn man statt der ganzen Zahlen Brüche setzt.

10) Die in (3. 4. 5.) enthaltenen Wahrheiten gelten auch für Bruchsbrüche, oder weil z. B. $\frac{3}{8} > \frac{4}{7}$, indem $\frac{3}{8} = \frac{4}{7} - \frac{11}{56}$ und $\frac{4}{7} = \frac{3}{8} + \frac{11}{56}$, so ist auch

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{7}} < 1, \quad \frac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{7}} = 1, \quad \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} < 1.$$

Denn nach [18. 1) Zus.] und 5) ist

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{7}} = \tfrac{3}{8} : \tfrac{4}{7} = (\tfrac{4}{7} - \tfrac{11}{56}) : \tfrac{4}{7} = (\tfrac{4}{7} : \tfrac{4}{7}) - (\tfrac{11}{56} : \tfrac{4}{7}) < 1$$

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{7}} = \tfrac{4}{7} : \tfrac{4}{7} = 1$$

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} = \tfrac{4}{7} : \tfrac{3}{8} = (\tfrac{3}{8} + \tfrac{11}{56}) : \tfrac{3}{8} = (\tfrac{3}{8} : \tfrac{3}{8}) + (\tfrac{11}{56} : \tfrac{3}{8}) > 1.$$

11) Die in (6. und 7) enthaltenen Sätze gelten auch für Bruchsbrüche, oder es ist z. B.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{11}} + \frac{\frac{5}{9}}{\frac{7}{11}} + \frac{\frac{8}{13}}{\frac{7}{11}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{8}{13}}{\frac{7}{11}}$$

$$\frac{\frac{17}{29}}{\frac{11}{71}} - \frac{\frac{19}{41}}{\frac{11}{71}} = \frac{\frac{17}{29} - \frac{19}{41}}{\frac{11}{71}}$$

Denn diese Gleichungen sind einerley mit folgenden

$$(\tfrac{3}{4} : \tfrac{7}{11}) + (\tfrac{5}{9} : \tfrac{7}{11}) + (\tfrac{8}{13} : \tfrac{7}{11}) = (\tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{9} + \tfrac{8}{13}) : \tfrac{7}{11}$$

$$(\tfrac{17}{29} : \tfrac{11}{71}) - (\tfrac{19}{41} : \tfrac{11}{71}) = (\tfrac{17}{29} - \tfrac{19}{41}) : \tfrac{11}{71}$$

deren Richtigkeit in 5) dargethan worden.

12) Der in (8) enthaltene Lehrsatz ist auch dann wahr, wenn der Multiplicator ein Bruch, und der Multiplicand ein Bruchsbruch ist, oder

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{71}} = \frac{\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{11}{71}}$$

denn diese Gleichung ist mit folgender einerley:

$$\tfrac{5}{7}.(\tfrac{3}{4}:\tfrac{11}{71}) = (\tfrac{5}{7}.\tfrac{3}{4}):\tfrac{11}{71}$$

deren Richtigkeit schon in 5) dargethan worden.

Weil ferner nach

$$\tfrac{11}{71}.(\tfrac{3}{4}:\tfrac{11}{71}) = \tfrac{3}{4}$$

so ist auch

$$\frac{11}{71}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{71}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{71}}\cdot\frac{11}{71} = \frac{3}{4}$$

oder es gilt auch die Behauptung im 3) Zus. für Bruchsbrüche.

13) Der in (9) enthaltene Lehrsatz ist auch wahr, wenn der Dividend ein Bruchsbruch und der Divisor ein Bruch ist, auch ohne die Einschränkung, daß der Zähler des Dividends durch den Divisor dividirt eine ganze Zahl giebt, und auch nach der andern Definition von Division. So ist z. B.

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{17}{23}}:\frac{9}{31} = \frac{\frac{4}{7}:\frac{9}{31}}{\frac{17}{23}}$$

Der Beweis ist wie oben, und daß, wenn Dividend und Divisor unbenannte Brüche sind, beyde Definitionen von Division einerley Quotienten geben, ist schon oben [17. 1) Zus.] gezeigt worden.

14) Die in (10) enthaltenen Lehrsätze gelten auch für Bruchsbrüche, und auch ohne daß die willkührliche Zahl bey II ein gemeinschaftliches Maaß, und bey III ein gemeinschaftliches Vielfaches vom Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs ist. So ist z. B.

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{11}{71}} = \frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{13}{29}}{\frac{11}{71}\cdot\frac{13}{29}} = \frac{\frac{4}{7}:\frac{13}{29}}{\frac{11}{71}:\frac{13}{29}} = \frac{\frac{13}{29}:\frac{11}{71}}{\frac{13}{29}:\frac{4}{7}}$$

Der Beweis ist wie oben.

Auch

Auch die ersten fünf Zusätze zu (10) gelten für Bruchsbrüche, oder wenn a, b, c, d Brüche sind. Der Beweis ist wie dort.

15) Die in (11. und 12.) enthaltenen Lehrsätze gelten auch, wenn der Dividend oder Multiplicand ein Bruchsbruch, und Divisor oder Multiplicator ein Bruch ist; z. B.

$$\frac{\frac{13}{71}}{\frac{15}{97}} : \frac{29}{11} = \frac{\frac{13}{71}}{\frac{29}{11} . \frac{15}{97}}$$

$$\frac{13}{9} . \frac{\frac{14}{31}}{\frac{17}{55}} = \frac{\frac{14}{31}}{\frac{17}{55} : \frac{13}{9}}$$

Der Beweis ist wie dort, und es gilt demnach der Satz (12) auch ohne die Einschränkung, daß der Multiplicator im Nenner des Multiplicands aufgeht.

16) Die in [16. und ebend. 1) Zus. und 2) Zus. enthaltenen Gleichungen gelten auch für Brüche, oder es ist

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} . B = \frac{4}{7} . (B : \frac{3}{8}) = (\frac{4}{7} . B) : \frac{3}{8}$$

$$B : \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} . (B : \frac{4}{7}) = (\frac{7}{8}\, B) : \frac{4}{7} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{7}} . B$$

denn diese Gleichungen sind mit folgenden einerley:

$$(\frac{4}{8} : \frac{3}{8}) . B = \frac{4}{7} . (B\ \frac{3}{8}) = (\frac{4}{7} . B) : \frac{3}{8}$$

$$B : (\frac{4}{7} : \frac{3}{8}) = \frac{3}{8} . (B : \frac{4}{7}) = (\frac{3}{8} . B) : \frac{4}{7} = (\frac{3}{8} : \frac{4}{7}) . B$$

deren Richtigkeit schon in 6) bewiesen worden.

Aber auch die [ebend. 8) 11) 12) 13) Zus.] enthaltenen Wahrheiten gelten für Bruchsbrüche, oder es ist

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{11}} . \frac{\frac{17}{26}}{\frac{31}{43}} = \frac{\frac{3}{8} . \frac{17}{26}}{\frac{4}{11} . \frac{31}{43}}$$

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{11}} \cdot \frac{\frac{17}{26}}{\frac{31}{43}} \cdot \frac{\frac{51}{97}}{\frac{76}{81}} \cdot \frac{\frac{41}{67}}{\frac{59}{89}} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{17}{26} \cdot \frac{51}{97} \cdot \frac{41}{67}}{\frac{4}{11} \cdot \frac{31}{43} \cdot \frac{76}{81} \cdot \frac{59}{89}}$$

$$\left(\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{11}}\right)^5 = \frac{(\frac{3}{8})^5}{(\frac{4}{11})^5} = \frac{\frac{243}{32768}}{\frac{1024}{161051}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{\frac{243}{32768}}{\frac{1024}{161051}}} = \frac{\sqrt[5]{\frac{243}{32768}}}{\sqrt[5]{\frac{1024}{161051}}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{11}}$$

Der Beweis ist eben so wie dort, und es erhellet zugleich die Richtigkeit der Behauptung in [16. 13) Zus.] auch für den Fall, wenn die Wurzeln aus dem Zähler und Nenner Brüche sind.

17) Die in (17.) gegebene Regel für die Division zweyer Brüche gilt auch für Bruchsbrüche, oder es ist

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{17}} : \frac{\frac{5}{13}}{\frac{10}{61}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{61}}{\frac{9}{17} \cdot \frac{5}{13}}$$

Der Beweis ist wie dort.

Auch der 1) Zus. gilt für Brüche und Bruchsbrüche, oder es ist

$$\frac{3}{11} : \frac{\frac{4}{7}}{\frac{19}{31}} = \frac{\frac{3}{11} \cdot \frac{19}{31}}{\frac{4}{7}}$$

Der Beweis ist wie dort.

Eben so gilt auch der 2) Zus. für Bruchsbrüche, oder es ist

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{13}} : \frac{\frac{5}{17}}{\frac{19}{61}} = \frac{\frac{3}{4} : \frac{5}{17}}{\frac{9}{13} : \frac{19}{61}}$$

Der Beweis ist wie dort, auch kann die dort vorgeschriebene Bedingung, daß der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividends, und der Nenner des Divisors in dem Nenner des Dividends aufgehen müsse, wegfallen.

Von

Von benannten gebrochenen Zahlen.

23. Aufgabe. Einen eigentlichen Bruch, der sich auf eine benannte Einheit höherer Art bezieht, durch Einheiten von niedrigerer Art auszudrücken.

Auflösung.

Man multiplicire mit diesem Bruche die Zahl, welche anzeigt, wieviel Einheiten niedrigerer Art auf eine Einheit der höhern Art gehen.

1) Beyspiel. $\frac{5}{8}$ Thaler auf Groschen zu bringen. Da

$$\tfrac{5}{8} . 24 = 5 . (24 : 8) = 5 . 3 = 15$$

so ist $\frac{5}{8}$ Thaler = 15 Groschen.

2) Beyspiel. $\frac{3}{5}$ Thaler auf Groschen zu bringen. Da [16. 6) Zus.]

$$\tfrac{3}{5} . 24 = 24 . \tfrac{3}{5} = \tfrac{72}{5} = 14\tfrac{2}{5}$$

so ist $\frac{3}{5}$ Thaler = $14\frac{2}{5}$ Groschen.

3) Beyspiel. $\frac{2}{5}$ Groschen auf Pfennige zu bringen.

$$\tfrac{2}{5} . 12 = 12 . \tfrac{2}{5} = \tfrac{24}{5} = 4\tfrac{4}{5}$$

also $\frac{2}{5}$ Groschen = $4\frac{4}{5}$ Pf. mithin nach vorigem Beyspiele

$$\tfrac{3}{5} \text{ Thaler} = 14 \text{ Gr. } 4\tfrac{4}{5} \text{ Pf.}$$

4) Beyspiel. $\frac{7}{9}$ Thaler auf Groschen zu bringen.

$$\tfrac{7}{9} . 24 = \tfrac{168}{9} = 18\tfrac{6}{9} = 18\tfrac{2}{3}$$

also $\frac{7}{9}$ Thaler = $18\frac{2}{3}$ Groschen. Wollte man diese $\frac{2}{3}$ Groschen auf Pfennige bringen, so fände man, da

$$\tfrac{2}{3} . 12 = \tfrac{24}{3} = 8$$

$\frac{2}{3}$ Groschen = 8 Pf. also $\frac{7}{9}$ Thaler = 18 Gr. 8 Pf.

5)

5) Beyspiel. $\frac{4}{7}$ Friedrichsd'or auf Thaler zu bringen.

$$\frac{4}{7} \cdot 5\frac{1}{3} = 3\frac{1}{21} \text{ nach [16.14) Zus.]}$$

also $\frac{4}{7}$ Friedrichsd'or $= 3\frac{1}{21}$ Thaler.

Beweis.

$\frac{4}{7}$ Friedrichsd'or $= \frac{4}{7} \cdot (5\frac{1}{3}$ Thaler$) = (\frac{4}{7} \cdot 5\frac{1}{3}$ Thaler$)$ nach (IIII. Kap. 1. und 2.)

24. Aufgabe. Einen eigentlichen oder uneigentlichen Bruch, der sich auf eine Einheit niederer Art bezieht, auf Einheiten höherer Art zu bringen.

Auflösung.

Man dividire diesen Bruch durch die Zahl, welche anzeigt, wieviel Einheiten niedrigerer Art auf eine Einheit der höhern Art gehen.

1) Beyspiel. 18 Groschen auf Thaler zu bringen. Da

$$18 : 24 = \frac{18}{24} = \frac{3}{4},$$

so sind 18 Groschen $= \frac{3}{4}$ Thaler.

2) Beyspiel. $5\frac{7}{13}$ Groschen auf Thaler zu bringen.

$$5\frac{7}{13} : 24 = \frac{72}{13} : 24 = \frac{3}{13}.$$

also sind $5\frac{7}{13}$ Groschen $= \frac{3}{13}$ Thaler.

3) Beyspiel. $\frac{20}{33}$ Groschen auf Thaler zu bringen.

$$\frac{20}{33} : 24 = \frac{20}{792} = \frac{5}{198}$$

also ist $\frac{20}{33}$ Groschen $= \frac{5}{198}$ Thaler.

4) Beyspiel. $1\frac{3}{13}$ Thaler auf Friedrichsd'or zu bringen.

$$1\tfrac{3}{13} : 5\tfrac{1}{3} = \tfrac{16}{13} : \tfrac{16}{3} = \tfrac{16 \cdot 3}{16 \cdot 13} = \tfrac{3}{13}$$

also ist $1\tfrac{3}{13}$ Thaler $= \tfrac{3}{13}$ Friedrichsd'or.

Beweis.

Da $1\tfrac{3}{13} : 5\tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{13}$, so ist $\tfrac{3}{13} \cdot 5\tfrac{1}{3} = 1\tfrac{3}{13}$, also nach (23.)

$\tfrac{3}{13}$ Friedrichsd'or $= (\tfrac{3}{13} \cdot 5\tfrac{1}{3})$ Thaler $= 1\tfrac{3}{13}$ Thaler.

Zusatz. Bey zusammengesetzten benannten Zahlen kann man auf doppelte Art verfahren.

1) Beyspiel. 18 Groschen 8 Pfennige auf Thaler zu bringen.

Nach der ersten Art verfährt man so:

8 Pfennige $= \tfrac{2}{3}$ Groschen
$18\tfrac{2}{3}$ Groschen $= \tfrac{7}{9}$ Thaler.

also 18 Groschen 8 Pfennige $= \tfrac{7}{9}$ Thaler.

Nach der andern aber also:

18 Gr. 8 Pf. = 224 Pfenn.
1 Thaler = 288 Pfenn. } nach [VI. Kap. 4. 2) Zus.]

also 18 Gr. 8 Pf. $= \tfrac{224}{288}$ Thlr. $= \tfrac{7}{9}$ Thlr.

2) Beyspiel. 14 Groschen $4\tfrac{4}{5}$ Pfenn. auf Thaler zu bringen.

Die erste Art giebt

$4\tfrac{4}{5}$ Pf. $= \tfrac{2}{5}$ Gr.
$14\tfrac{2}{5}$ Gr. $= \tfrac{3}{5}$ Thlr.

also 14 Gr. $4\tfrac{4}{5}$ Pf. $= \tfrac{3}{5}$ Thlr.

Nach der andern hat man

14 Gr. $4\tfrac{4}{5}$ Pf. $= 172\tfrac{4}{5}$ Pf.
1 Thlr. $= 288$ Pf.
$172\tfrac{4}{5} : 288 = \tfrac{864}{5} : 288 = \tfrac{3}{5}$

folglich 14 Gr. $4\tfrac{4}{5}$ Pf. $= \tfrac{3}{5}$ Thlr.

3)

3) Beyspiel. 57 Pfund 21 Loth $2\frac{3}{11}$ Quentchen auf Centner zu bringen.

Die erste Art giebt

$$2\tfrac{3}{11}\text{ Quentchen} = \tfrac{25}{44}\text{ Loth}$$
$$21\tfrac{25}{44}\text{ Loth} = \tfrac{949}{1408}\text{ Pfund}$$
$$57\tfrac{949}{1408}\text{ Pfund} = \tfrac{16241}{30976}\text{ Centner}$$

also ist 57 Pfund 21 Loth $2\frac{3}{11}$ Quentchen $= \frac{16241}{30976}$ Centner.

Nach der andern hat man

$$57\text{ Pf. }21\text{ Lt. }2\tfrac{3}{11}\text{ Quentchen} = 7382\tfrac{3}{11}\text{ Quentchen}$$
$$1\text{ Centner} = 14080\text{ Quentchen}$$
$$7382\tfrac{3}{11} : 14080 = \tfrac{16241}{30976}$$

also 57 Pfund 21 Loth $2\frac{3}{11}$ Quentchen $= \frac{16241}{30976}$ Centner.

Anmerkung. Was im VI. Kapitel von der Rechnung mit ganzen benannten Zahlen gelehrt worden, ist in Verbindung mit dem im gegenwärtigen Kapitel Vorgetragenen hinreichend, um alle Aufgaben auflösen zu können, welche gewöhnlich zu der Addition, Subtraction, Multiplication und Division mit gebrochenen benannten Zahlen gerechnet werden.

Zehntes Kapitel.

Von zusammengesetzten Ausdrücken, additiven und subtractiven Größen.

1. Erklärung.

Ein Ausdruck, welcher aus mehrern Zahlen oder auch gleichartigen Größen zusammengesetzt ist, welche unter einander durch die Zeichen $+$ und $-$ verbunden sind, wie z. B. $3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9$, heißt ein zusammengesetzter Ausdruck, oder eine zusammengesetzte Größe. Die Bedeutung dieses angeführten zusammengesetzten Ausdrucks ist, man soll zu 3 17 addiren, von dem, was herauskommt, 5 subtrahiren, zu dem, was nun herauskommt, 12 addiren u. s. w. nach folgender Rechnung:

3	
17	add.
20	
5	subtr.
15	
12	add.
27	
4	subtr.
23	
11	add.
34	
9	subtr.
25	

also ist der Werth des angeführten zusammengesetzten Ausdrucks 25 oder $3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9 = 25$. Eben so verfährt man bey andern Beyspielen, und auch wenn statt der unbenannten Zahlen Größen jeder Art vorkommen.

1) Zusatz. Es giebt zusammengesetzte Ausdrücke, bey denen man, wenn man ihren Werth auf die angezeigte Art entwickeln wollte, in die Verlegenheit kommt, eine größere Zahl oder Größe von einer kleinern abzuziehen. Wollte man z. B. bey dem zusammengesetzten Ausdrucke: $4 + 7 - 6 + 3 + 8 - 11 + 4 - 13 + 2 + 7 - 1$ den Werth auf die angezeigte Art entwickeln:

$$\begin{array}{rl} 4 & \\ \underline{7} & \text{add.} \\ 11 & \\ \underline{6} & \text{subtr.} \\ 5 & \\ \underline{3} & \text{add.} \\ 8 & \\ \underline{8} & \text{add.} \\ 16 & \\ \underline{11} & \text{subtr.} \\ 5 & \\ \underline{4} & \text{add.} \\ 9 & \\ \underline{13} & \text{subtr.} \end{array}$$

so käme man in die Verlegenheit, 13 von 9 abzuziehen. Es erhellet, daß diese Verlegenheit nie bey der Addition oder bey einem Theile, der das Zeichen + vor sich hat, sondern nur bey der Subtraction, oder einem Theile, der das Zeichen — vor sich hat, eintreten könne. Ob solche zusammengesetzte Ausdrücke einen Werth haben oder nicht, wird sich erst in der Folge entscheiden lassen. Bis dahin sollen dergleichen zusammengesetzte Ausdrücke anstößige, hingegen solche, bey denen man nicht in diese Verlegenheit kommt, verständliche heißen.

2) Zusatz. Bey der Bestimmung des Werthes eines verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks, z. B. $3+17-5+12-4+11-9$ sind die Zahlen 20, 15, 27, 23, 34, worauf man nach und nach kommt, die Werthe der zusammengesetzten Ausdrücke $3+17$, $3+17-5$, $3+17-5+12$, $3+17-5+12-4$, $3+17-5+12-4+11$, welche durch jede willkührliche Anzahl am weitesten zur Linken stehender Theile gebildet werden; also sind auch alle diese zusammengesetzten Ausdrücke verständlich. Es erhellet zugleich, daß der Werth des ganzen zusammengesetzten Ausdrucks 25 auch $=27-4+11-9$ sey, und da $27=3+17-5+12$, so ist auch

$$3+17-5+12-4+11-9=(3+17-5+12)-4+11-9,$$

oder allgemein: Der Werth eines verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks ändert sich nicht, wenn man statt zweyer oder mehrerer am weitesten zur Linken stehender Theile ihren Werth setzt.

3) Zusatz. Soll zu dem Werthe eines verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks eine Größe addirt werden, so braucht man selbige blos am weitesten zur Rechten mit dem Zeichen $+$ zu schreiben; soll aber von dem Werthe eines verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks eine Größe abgezogen werden, welche nicht größer ist als dieser Werth, so braucht man selbige blos am weitesten zur Rechten mit dem Zeichen $-$ zu schreiben. In beyden Fällen kommen wieder verständliche zusammengesetzte Ausdrücke heraus. Z. B.

$$(3+17-5+12-4+11-9)+16$$
$$=3+17-5+12-4+11-9+16$$
$$(3+17-5+12-4+11-9)-18$$
$$=3+17-5+12-4+11-9-18$$

2. Erklärung. Diejenigen Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks, die das Zeichen $+$ vor sich haben, und der am

am weitesten zur Linken befindliche, welcher gar kein Zeichen vor sich hat, heißen additive Theile, oder additive Größen, oder additive Glieder; und diejenigen Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks, die das Zeichen — vor sich haben, heißen subtractive Theile, oder subtractive Größen, oder subtractive Glieder. So sind z. B. bey dem zusammengesetzten Ausdrucke

$$3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9$$

die additiven Theile 3, 17, 12, 11, die subtractiven 5, 4, 9.

3. Lehrsatz. Wenn man den Werth eines verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks zu der Summe der subtractiven Theile hinzuaddirt, so kommt die Summe der additiven heraus; z. B. bey obigem Ausdrucke ist

$$(5 + 4 + 9) + (3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9)$$
$$= 3 + 17 + 12 + 11.$$

Beweis.

Da der zusammengesetzte Ausdruck $3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9$ verständlich ist, so sind nach [1. 2) Zus.] auch alle die zusammengesetzten Ausdrücke $3+17$, $3+17-5$, $3+17-5+12$, u. s. w. welche durch Mengen am weitesten zur Linken stehender Theile gebildet werden, verständlich. Nun ist offenbar

$$5 + (3 + 17 - 5) = 3 + 17$$

also, wenn man beyderseits 12 addirt, nach (1. 3) Zus. und III. Kap. 7.)

$$5 + (3 + 17 - 5 + 12) = 3 + 17 + 12$$

und nach [1. 3) Zus. und III. Kap. 7. 2) Zus.]

$$(5 + 4) + (3 + 17 - 5 + 12 - 4) = 3 + 17 + 12$$

also, wenn man beyderseits 11 addirt, nach [1. 3) Zus. und III. Kap. 7.]

$$(5 + 4) + (3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11) = 3 + 17 + 12 + 11$$

und nach [1. 3) Zus. und III. Kap. 7. 2) Zus.]

(5

$$(5+4+9)+(3+17-5+12-4+11-9)$$
$$=3+17+12+11.$$

1) Zusatz. In einem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke ist demnach sowohl bey jeder Menge am weitesten zur Linken stehender Theile, als auch bey dem ganzen Ausdrucke die Summe der additiven Theile niemals kleiner als die Summe der subtractiven, und man findet den Werth desselben, wenn man von der Summe der additiven Glieder die Summe der subtractiven abzieht.

2) Zusatz. Denkt man sich aber bey einem anstößigen zusammengesetzten Ausdrucke alle diejenigen Theile hinweg oder als nicht vorhanden, die demjenigen subtractiven Theile, der die Verlegenheit verursacht, zur Rechten stehen, so ist die Summe der übrigbleibenden additiven Theile kleiner als die der subtractiven. Denn es sey

$$a-b+c+d-e+f-g \text{ u.s.w.}$$

ein anstößiger zusammengesetzter Ausdruck; und zwar trete bey dem subtractiven Theile g die Verlegenheit oder der Anstoß ein, so ist der zusammengesetzte Ausdruck ohne diesen subtractiven Theil oder $a-b+c+d-e+f$ noch verständlich, sein Werth aber kleiner als g, denn eben dieser Umstand verursacht den Anstoß. Weil nun also

$$\begin{aligned} a-b+c+d-e+f &< g \\ b+e &= b+e \end{aligned}$$

so ist auch

$$(b+e)+(a-b+c+d-e+f)<b+e+g$$

Nun ist

$$(b+e)+(a-b+c+d-e+f)=a+c+d+f$$

also

$$a+c+d+f < b+e+g.$$

3) Zusatz. Folgen auf den gedachten subtractiven Theil, der den Anstoß verursacht, zur Rechten noch mehrere sub-

subtractive Theile, und zieht man diese noch mit in Betrachtung, so ist die Summe der additiven Theile noch vielmehr kleiner als die der subtractiven. Denn wäre der anstößige zusammengesetzte Ausdruck

$$a - b + c + d - e + f - g - h - k \text{ u. s. w.}$$

und wie vorhin g der subtractive Theil, der den Anstoß verursacht, so ist nach 2) Zus.

$$a + c + d + f < b + e + g$$

aber auch offenbar

$$b + e + g < b + e + g + h + k$$

also noch vielmehr

$$a + c + d + f < b + e + g + h + k$$

4) Zusatz. Denkt man sich also bey einem anstößigen zusammengesetzten Ausdrucke zur Rechten jedes subtractiven Theiles, dem nicht zunächst zur Rechten wieder ein subtractiver Theil folgt, einen Verticalstrich gezogen, so muß wenigstens bey einem dieser Verticalstriche die Summe aller ihm zur Linken stehenden additiven Theile kleiner seyn, als die der subtractiven. Bey einem verständlichen Ausdrucke aber kann dieses nach 1) Zus. nie statt finden; also erhellet hieraus, daß, wenn man bey einem zusammengesetzten Ausdrucke zur Rechten eines jeden subtractiven Theiles, diejenigen ausgenommen, welchen zunächst zur Rechten wieder ein subtractiver Theil steht, einen Verticalstrich zieht, und bey jedem Verticalstriche die Summe aller ihm zur Linken stehenden additiven Theile nicht kleiner als die der subtractiven ist, der Ausdruck verständlich seyn müsse. Findet sich aber bey irgend einem Verticalstriche das Gegentheil, so ist der Ausdruck anstößig.

1) Beyspiel. Der zusammengesetzte Ausdruck sey

$$8 + 3 + 17 - 5 - 4 - 12 \mid + 3 - 6 \mid + 16 - 9 - 10 \mid + 2$$

so

so ist bey dem ersten Verticalstriche
die Summe der additiven Theile $8 + 3 + 17 = 28$
die Summe der subtractiven Theile $5 + 4 + 12 = 21$

bey dem zweyten Verticalstriche
die Summe der additiven Theile $28 + 3 = 31$
die Summe der subtractiven Theile $21 + 6 = 27$

bey dem dritten Verticalstriche
die Summe der additiven Theile $31 + 16 = 47$
die Summe der subtractiven Theile $27 + 9 + 10 = 46$

also ist dieser Ausdruck verständlich.

2) Beyspiel. Der zusammengesetzte Ausdruck sey

$$4 + 7 - 9 \,|\, + 6 + 8 - 4 - 3 - 6 - 5 - 2 \,|\, + 11 - 7 \,|$$

so ist bey dem ersten Verticalstriche
die Summe der additiven Theile $4 + 7 = 11$
die Summe der subtractiven Theile $9 = 9$

bey dem zweyten Verticalstriche
die Summe der additiven Theile $11 + 6 + 8 = 25$
die Summe der subtractiven Theile $9 + 4 + 3 + 6 + 5 + 2 = 29$,

also ist der Ausdruck anstößig.

5) Zusatz. Wenn eine Menge additiver und subtractiver Glieder gegeben ist, und die Summe der additiven Theile nicht kleiner als die Summe der subtractiven ist, so ist es allemal möglich, sie so unter einander zu ordnen, daß verständliche zusammengesetzte Ausdrücke herauskommen, deren Werthe alle dem Ueberschusse der Summe der additiven Theile über die Summe der subtractiven nach 1) Zus. gleich sind. Man kann nämlich alle additiven Glieder am weitesten zur Linken, und alle subtractiven am weitesten zur Rechten,

ten, übrigens beyde in einer willkührlichen Ordnung schreiben, dann kommen nach 4) Zus. allemal verständliche zusammengesetzte Ausdrücke heraus. Sehr oft kann man aber auch verständliche zusammengesetzte Ausdrücke herausbringen, wenn additive und subtractive Glieder unter einander gemengt gesetzt werden, nur muß der Theil am weitesten zur Linken ohne vorgesetztes Zeichen allemal ein additiver seyn.

Beyspiel. Aus den additiven Gliedern 7, 17, 4, 13, deren Summe 41, und den subtractiven 8, 18, 6, 3, 2, deren Summe 37 ist, verständliche zusammengesetzte Ausdrücke zu machen.

Will man solche haben, wo additive und subtractive Glieder nicht unter einander gemengt stehen, so sind es folgende z. B.

$$7 + 17 + 4 + 13 - 8 - 18 - 6 - 3 - 2$$
$$4 + 7 + 13 + 17 - 18 - 3 - 8 - 2 - 6$$

Es giebt aber auch solche, wo additive und subtractive Glieder unter einander stehen, z. B.

$$7 - 3 - 2 + 4 - 6 + 13 - 8 + 17 - 18$$
$$17 + 4 - 18 + 13 - 8 - 6 + 7 - 3 - 2$$

und der Werth aller dieser verständlichen Ausdrücke ist $41 - 37$ oder 4.

6) Zusatz. Man kann bey einem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke, ohne seinen Werth zu ändern, und unbeschadet der Verständlichkeit desselben, ein additives Glied weiter zur Linken und ein subtractives weiter zur Rechten rücken, wenn nur die übrigen ihre Stellen behalten. Weil z. B.

$$7 - 3 - 2 + 4 - 6 + 13 - 8 + 17 - 18$$

ein verständlicher zusammengesetzter Ausdruck ist, so kann man das additive Glied 17 aus der achten Stelle, worin es

steht,

steht, in die dritte, und das subtractive Glied 6 aus der fünften Stelle, worin es steht, in die siebente rücken, und die dadurch entstehenden zusammengesetzten Ausdrücke

$$7 - 3 + 17 - 2 + 4 - 6 + 13 - 8 - 18$$

$$7 - 3 - 2 + 4 + 13 - 8 - 6 \quad 17 - 18$$

sind beyde verständlich, und haben mit vorigen einerley Werth, nämlich 4.

7) Zusatz. Um einen gegebenen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck um eine gewisse Größe zu vermehren, kann man dieselbe am weitesten zur Linken neben den zusammengesetzten Ausdruck, und zwischen sie und das erste Glied desselben das Zeichen + setzen. Denn nach (1. 3) Zus.) ist

$$6 + (3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9) = 3 + 17 - 5$$
$$+ 12 - 4 + 11 - 9 + 6$$

und nach vorigem Zusatze

$$3 + 17 - 5 + 12 - 4 + 11 - 9 + 6 = 6 + 3 + 17 - 5$$
$$+ 12 - 4 + 11 - 9.$$

also

$$6 + (3 + 17 - 5 + 12 - 4 \quad 11 - 9) = 6 + 3 + 17 - 5$$
$$+ 12 - 4 + 11 - 9$$

Eben das gilt, wenn die gedachte Größe der Werth eines verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks ist. Es ist demnach

$$(4 + 7 - 3 - 5 + 10) + (5 - 3 + 8 - 6 + 15)$$
$$= (4 + 7 - 3 - 5 + 10) + 5 - 3 + 8 - 6 + 15$$

oder nach [1. 2) Zus.]

$$= 4 + 7 - 3 - 5 + 10 + 5 - 3 + 8 - 6 + 15$$

Es kann demnach die Summe zweyer verständlicher zusammengesetzter Ausdrücke durch einen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck dargestellt werden, wenn man die beyden

Sum-

Summanden neben einander schreibt, und zwischen beyde das Zeichen + setzt.

4. Aufgabe. Einen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck anzugeben, welcher der Summe mehrerer gegebener verständlicher zusammengesetzter Ausdrücke gleich ist, oder mehrere gegebene verständliche zusammengesetzte Ausdrücke zu addiren.

Auflösung.

Man schreibe sie neben einander, und setze zwischen jedem ersten Gliede eines folgenden und letzten Gliede eines vorhergehenden zusammengesetzten Ausdrucks das Zeichen +.

Beyspiel. Die gegebenen zusammengesetzten Ausdrücke seyen

$$6 + 7 - 3 + 5$$
$$8 - 6 - 1 + 4$$
$$9 - 1 + 2 + 3 - 5$$
$$6 + 23 - 19 + 7$$

so ist

$$6+7-3+5+8-6-1+4+9-1+2+3-5+6+23-19+7$$
$$=[6+7-3+5]+[8-6-1+4]+[9-1+2+3-5]$$
$$+[6+23-19+7].$$

Beweis

Folgt aus wiederholter Anwendung von [3. 7) Zus.]

Zusatz. Sind von jedem Summanden blos die additiven und subtractiven Glieder gegeben, so ist die Summe gleich jedem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke, dessen additive und subtractive Theile alle vorkommende additive und subtractive Theile aller Summanden sind. Es erhellet dies auch aus [3. 1) Zus. und [III. Kap. 8. 1]

5.

5. Aufgabe. Von einem gegebenen verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke einen andern dergleichen, dessen Werth nicht größer als der des vorigen ist, abzuziehen, oder einen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck anzugeben, welcher der Differenz zweyer gegebenen verständlichen zusammengesetzten Ausdrücke gleich ist.

Auflösung.

Man setze den Minuend ungeändert hin, verwandele die additiven Theile des Subtrahends in subtractive, die subtractiven in additive, und setze sie so in umgekehrter Ordnung zur Rechten des Minuends.

Beyspiel.

$$(19+15-8-4+3)-(13+6-9-2+4)$$
$$=19+15-8-4+3-4+2+9-6-13$$

Beweis.

$(19+15-8-4+3)-(13+6-9-2+4)$ ist nach [III. Kap. 7. 8) Zus. X]

$$=(19+15-8-4+3-4)-(13+6-9-2)$$

nach [ebend. 9) Zus. XI]

$$=(19+15-8-4+3-4+2)-(13+6-9)$$
$$=(19+15-8-4+3-4+2+9)-(13+6)$$

nach [ebend. 8) Zus. X]

$$=(19+15-8-4+3-4+2+9-6)-13$$

nach [1. 3) Zus.]

$$=19+15-8-4+3-4+2+9-6-13$$

1) Zusatz. Sind vom Minuend und Subtrahend blos die additiven und subtractiven Glieder gegeben, so ist die Differenz gleich jedem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke, dessen additive Glieder die additiven Glieder des Minuends und die subtractiven Glieder des Subtrahends, und dessen

dessen subtractive Glieder die subtractiven Glieder des Minuends und die additiven Glieder des Subtrahends sind. Es erhellet dies auch aus [3. 1) Zus.] und [III. Kap. 8. II]

2) Zusatz. Wenn bey einem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke die Theile selbst verständliche zusammengesetzte Ausdrücke sind, so läßt sich sein Werth auch durch einen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck ausdrücken, welcher entsteht, wenn bey den additiven Haupttheilen die einfachen Theile und ihre Ordnung bleiben wie sie sind, bey den subtractiven hingegen die additiven einfachen Theile in subtractive, und die subtractiven in additive verwandelt, und in umgekehrter Ordnung geschrieben werden. So ist z. B.

$$(8+7-4+3)+(3+2-1+6)-(4-2-1+11)-(12-10+6+3)+(13-9+6-8)$$
$$=8+7-4+3+3+2-1+6-11+1+2-4-3-6+10-12+13-9+6-8$$

6. Aufgabe. Das Product zweyer Factoren, wovon der eine einfach, der andere aber ein verständlicher zusammengesetzter Ausdruck ist, durch einen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck darzustellen.

Auflösung.

Man setze die Producte aus dem einfachen Factor in jeden Theil des zusammengesetzten Factors nach ihrer Ordnung hin, und nehme jedes derselben additiv oder subtractiv, je nachdem der multiplicirte Theil des zusammengesetzten Factors darin additiv oder subtractiv war.

Wenn z. B. die Buchstaben a, b, c, d, e unbenannte Brüche oder ganze Zahlen, der Buchstabe A aber eine Größe jeder Art bedeutet, und der zusammengesetzte Ausdruck $a - b - c + d - e$ verständlich ist, so ist auch der zusammengesetzte Ausdruck $a.A - b.A - c.A + d.A - e.A$ verständlich und zugleich

I. $(a-b-c+d-e).A = a.A - b.A - c.A + d.A - e.A$

Eben so wenn die Buchstaben A, B, C, D, E gleichartige Größen jeder Art, der Buchstabe a aber einen unbenannten Bruch oder ganze Zahl bedeutet, und der zusammengesetzte Ausdruck $A - B - C + D - E$ verständlich ist, so kann das Product aus a, und $A - B - C + D - E$ durch folgenden verständlichen zusammengesetzten Ausdruck $a.A - a.B - a.C + a.D - a.E$ ausgedrückt werden, oder es ist

II. $a.(A-B-C+D-E) = a.A - a.B - a.C + a.D - a.E.$

Beweis.

Für I. Da nach der Voraussetzung der zusammengesetzte Ausdruck $a - b - c + d - e$ verständlich ist, so sind nach [1. 2) Zus.] es auch die zusammengesetzten Ausdrücke $a - b$, $a - b - c$, $a - b - c + d$, und es ist nach [1. 3) Zus. und IX. Kap. 22, 2]

$$(a - b).A = a.A - b.A,$$

also auch

$$(a - b - c).A = [(a - b) - c].A = (a - b).A - c.A = (a.A - b.A) - c.A = a.A - b.A - c.A,$$

also auch

$$(a - b - c + d).A = [(a - b - c] + d].A = (a - b - c).A + d.A = (a.A - b.A - c.A) + d.A = a.A - b.A - c.A + d.A,$$

also auch

$$(a - b - c\ d - e).A = [(a - b - c + d) - e].A = (a - b - c\ d).A - e.A = (a.A - b.A - c.A + d.A) - e.A = a.A - b.A - c.A\ d.A - e.A$$

Für

Für II ist der Beweis eben so, wenn statt der kleinen Buchstaben a, b, c, d, e die correspondirenden großen A, B, C, D, E, statt des großen Buchstaben A der correspondirende kleinere a, und bey allen vorkommenden Producten aus zwey Factoren der Factor zur Linken auf die rechte Seite und umgekehrt der Factor zur Rechten auf die linke Seite gesetzt wird.

7. Aufgabe. Das Product aus zween verständlichen zusammengesetzten Ausdrücken durch einen verständlichen zusammengesetzten Ausdruck darzustellen.

Auflösung.

Man setze die Producte aus dem ersten Theile des einen Factors in jeden Theil des andern ihrer Ordnung nach hin, daneben zur Rechten setze man wieder die Producte aus dem andern Theile des ersten Factors in jeden Theil des andern, und zwar ihrer Ordnung nach, wenn der andere Theil des ersten Factors additiv ist, im Gegentheile aber in umgekehrter Ordnung; dasselbe mache man mit dem dritten, vierten u. s. w. bis letzten Theile des ersten Factors. Diejenigen Producte, deren beyde Factoren additiv oder beyde subtractiv waren, nehme man additiv, oder setze ihnen (mit Ausschluß des am weitesten zur Linken stehenden, welches nach (2.) allemal additiv ist) das Zeichen + vor, diejenigen aber, bey denen ein Factor additiv, der andere subtractiv ist, nehme man subtractiv, oder setze ihnen das Zeichen — vor. Der dadurch entstehende zusammengesetzte Ausdruck ist verständlich und dem gegebenen Producte gleich. Willkührlich ist es übrigens, ob man den Multiplicand oder den Multiplicator für den ersten Factor annehmen will.

Beyspiel. Wenn A, B, C, D, E gleichartige Größen jeder Art, a, b, c, d aber ganze Zahlen oder Brüche bedeuten, und die zusammengesetzten Ausdrücke A + B — C — D + E und a — b + c — d verständlich sind, so ist das Product

(a

$(a - b + c - d).(A + B - C - D + E) = a.A + a.B - a.C - a.D + a.E - b.E + b.D + b.C - b.B - b.A + c.A + c.B - c.C - c.D + c.E - d.E + d.D + d.C - d.B - d.A$, wenn man den Multiplicator für den ersten Factor annimmt. Nimmt man aber den Multiplicand für den ersten Factor an, so erhält man $(a - b + c - d).(A + B - C - D + E) = a.A - b.A + c.A - d.A + a.B - b.B + c.B - d.B + d.C - c.C + b.C - a.C + d.D - c.D + b.D - a.D + a.E - b.E + c.E - d.E$.

Beweis.

Da nach der Voraussetzung $A + B - C - D + E$ ein verständlicher zusammengesetzter Ausdruck ist, so heiße sein Werth V, oder es sey

$$V = A + B - C - D + E$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} aV &= a.A + a.B - a.C - a.D + a.E \\ bV &= b.A + b.B - b.C - b.D + b.E \\ cV &= c.A + c.B - c.C - c.D + c.E \\ dV &= d.A + d.B - d.C - d.D + d.E \end{aligned}\right\} \text{nach (6.)}$$

Da ferner auch $a - b + c - d$ ein verständlicher zusammengesetzter Ausdruck ist, so ist nach [6. und 5. 2) Zus.]

$$(a - b + c - d).(A + B - C - D + E) = (a - b + c - d).V = a.V - b.V + c.V - d.V = (a.A + a.B - a.C - a.D + a.E) - (b.A + b.B - b.C - b.D + b.E) + (c.A + c.B - c.C - c.D + c.E) - (d.A + d.B - d.C - d.D + d.E) = a.A + a.B - a.C - a.D + a.E - b.E + b.D + b.C - b.B - b.A + c.A + c.B - c.C - c.D + c.E - d.E + d.D + d.C - d.B - d.A$$

welches die erste Darstellung ist. Eben so läßt sich der Beweis für die andere Darstellung geben, wenn man nur den Werth des verständlichen zusammengesetzten Ausdrucks $a - b + c - d$ durch v bezeichnet.

Es

Es erhellet also, daß die Theile des zusammengesetzten Ausdrucks, welcher das Product angiebt, die Producte sind, welche herauskommen, wenn jeder Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern Factors multiplicirt wird. Ein Product, dessen beyde Factoren additiv sind, wie z. B. cE, erscheint allemal als additiver einfacher Theil in einem additiven Hauptheile, wird also [5. 2) Zus.] allemal additiv, wenn die Klammern wegfallen. Ein Product, dessen beyde Factoren subtractiv sind, wie z. B. bD, erscheint allemal als subtractiver einfacher Theil in einem subtractiven Haupttheile, wird also [5. 2) Zus.] auch additiv, wenn die Klammern wegfallen. Ein Product aber, wobey ein Factor additiv, der andere subtractiv ist, wie z. B. cD oder bE, erscheint entweder, wie z. B. cD, als subtractiver einfacher Theil in einem additiven Haupttheile, oder, wie z. B. bE, als additiver einfacher Theil in einem subtractiven Haupttheile, je nachdem der subtractive Factor in demjenigen zusammengesetzten Factor, den man als einfach ansah, das heißt, dessen Werth durch V oder v angedeutet wurde, oder in dem andern zusammengesetzten Factor vorkommt, wird also [5. 2) Zus.] allemal subtractiv, wenn die Klammern weggelassen werden.

1) Zusatz. Die beyden Darstellungen, welche man für das Product erhält, je nachdem man entweder den Multiplicator oder den Multiplicand für den ersten Factor annimmt, sind beyde verständlich, und enthalten einerley additive und subtractive Theile, woraus man nach [3. 1) Zus.] auch ihre Gleichheit übersieht.

2) Zusatz. Sind von jedem Factor blos die additiven und subtractiven Theile gegeben, so ist das Product gleich jedem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke, dessen Glieder die Producte sind, welche herauskommen, wenn jeder Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern Factors multiplicirt wird. Diejenigen Producte, deren beyde

Factoren additiv, oder beyde subtractiv sind, werden additiv genommen; diejenigen aber, bey denen ein Factor additiv und der andere subtractiv ist, werden subtractiv genommen. Es erhellet dies auch aus [3. 1) Zus. und IV. Kap. 5. 2) Zus.] Daher kommt die gewöhnliche Regel: Einerley Zeichen geben bey der Multiplication +, verschiedene —, welche verständlich ist, in so fern man jedem additiven Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks das Zeichen + und jedem subtractiven das Zeichen — vorgeschrieben gedenkt, welches auch in der That der Fall ist, ausgenommen bey dem am weitesten zur Linken stehenden Gliede, welches allemal additiv ist, aber kein vorgesetztes Zeichen hat, und auch der Natur der Sache nach nicht haben kann.

Beyspiel. Der eine Factor habe die additiven Theile 4, 6, 13, und die subtractiven 9, 11, also den Werth 3; der andere Factor habe die additiven Theile 7, 18, und die subtractiven 1, 3, 5, 8, also den Werth 8, so ist das Product gleich jedem verständlichen zusammengesetzten Ausdrucke, dessen

additive Glieder	subtractive Glieder
4. 7 = 28	4. 1 = 4
4. 18 = 72	4. 3 = 12
6. 7 = 42	4. 5 = 20
6. 18 = 108	4. 8 = 32
13. 7 = 91	6. 1 = 6
13. 18 = 234	6. 3 = 18
9. 1 = 9	6. 5 = 30
9. 3 = 27	6. 8 = 48
9. 5 = 45	13. 1 = 13
9. 8 = 72	13. 3 = 39
11. 1 = 11	13. 5 = 65
11. 3 = 33	13. 8 = 108
11. 5 = 55	9. 7 = 63

11.

add. Gl.	subtr. Gl.
11 . 8 = 88	9 . 18 = 162
	11 . 7 = 77
	11 . 18 = 198

sind Die Summe der additiven Theile ist 915, der subtractiven 891, also sein Werth 915 — 891 = 24, welches auch in der That das Product der beyden Factoren 3 und 8 ist.

Eilftes Kapitel.

Von negativen und entgegengesetzten Größen.

1. Bemerkung.

Es ist häufig der Fall, daß eine Größe von der Differenz zweyer gleichartigen Größen, und manchmal noch überdies von andern Umständen und Größen abhängt, aber auf eine andere Art bestimmt wird, je nachdem entweder die eine oder die andere größer ist, oder je nachdem die eine oder die andere für den Minuend oder Subtrahend genommen wird. Folgende Beyspiele werden dies erläutern:

Erstes Beyspiel. Wenn A und B Geldgrößen bedeuten, und eine Person A Vermögen und B Schulden hat, so hat diese Person (A — B) Vermögen, wenn $A > B$, oder (B — A) Schulden, wenn $B > A$.

Zweytes Beyspiel. Wenn eine Person zwey Spiele gespielt, und in einem A gewonnen, im andern aber B verloren hat, so hat diese Person (A — B) Gewinnst, wenn $A > B$, oder (B — A) Verlust, wenn $B > A$.

Drittes Beyspiel. Wenn C, B, A gleichartige Größen jeder Art bedeuten, und die Größe C erst um A vermehrt, und was nun herauskommt, um B vermindert worden ist, so ist nach [III. Kap. 7. 6) Zus. VIII und 9) Zus. XI] diese Größe C um (A — B) vermehrt, wenn $A > B$, oder um (B — A) vermindert worden, wenn $B > A$.

Viertes Beyspiel. Wenn A und B Linien von bestimmter Länge bedeuten, die Punkte C, D, E in einer geraden, z. B. von Morgen nach Abend gehenden Linie liegen, und die Punkte D und E von dem Punkte C um die Abstände A und B nach Morgen entfernt sind, so ist D von E um (A — B) nach Morgen, wenn $A > B$, oder um (B — A) nach Abend, wenn $B > A$, entfernt.

Fünf-

Fünftes Beyspiel. Wenn A und B Zeiträume, C, D, E gewisse Begebenheiten sind, und es sind die Begebenheiten D und E um die Zeiträume A und B nach der Begebenheit C vorgefallen, so ist die Begebenheit D um den Zeitraum (A - B) nach, wenn $A > B$, oder um den Zeitraum (B - A) vor, wenn $B > A$, der Begebenheit E erfolgt.

Sechstes Beyspiel. Wenn a einen unbenannten Bruch oder ganze Zahl, m und n aber unbenannte ganze Zahlen bedeuten, so ist [IX. Kap. 22. 6) und 8)] der Quotient $a^m : a^n = a^{m-n}$, wenn $m > n$, oder $= 1 : a^{n-m}$, wenn $m < n$.

1) Zusatz. Es würde beschwerlich seyn, und große Weitläuftigkeiten verursachen, wenn man bey allgemeinen Untersuchungen allemal die beyden Fälle, bey jedem Paare gleichartiger Größen, auf deren Differenz es ankommt, unterscheiden, und jeden besonders untersuchen wollte. Man legt dann bequemer bey jedem solchen Paare einen Fall zum Grunde aller übrigen. Tritt dann bey einem oder mehrern Paaren der umgekehrte Fall ein, so kommt man zwar auf Differenzen, bey welchen der Subtrahend größer als der Minuend ist; allein die Bedeutung solcher Differenzen ist nach den angeführten und mehrern andern ähnlichen Beyspielen, die man sich leicht machen kann, ohne Schwierigkeit zu erklären. So erhellet aus den angeführten Beyspielen, daß

1) (A — B) Vermögen, und (B — A) Schulden
2) (A—B) Gewinnst, und (B — A) Verlust
3) (A — B) Vermehrung, und (B — A) Verminderung
4) (A—B) Entfernung nach Morgen, und (B — A) Entfernung nach Abend
5) (A — B) vor, und (B — A) nach
6) a^{m-n} und $1 : a^{n-m}$

wo

(wo in 1) und 2) A und B Geldgrößen, in 3) gleichartige Größen jeder Art, in 4) Linien, in 5) Zeiträume, und in 6) a einen unbenannten Bruch oder ganze Zahl, und m und n unbenannte ganze Zahlen bedeuten) gleichbedeutend sind. Mehrere solcher Sätze ließen sich aus ähnlichen Beyspielen ableiten, und man ist vermittelst derselben in den Stand gesetzt, Differenzen, bey denen der Subtrahend größer als der Minuend ist, durch die umgekehrten Differenzen, wenn Minuend und Subtrahend verwechselt werden, und deren Bedeutung dann keine Schwierigkeit hat, zu erklären.

2) Zusatz. Man kann auch durch andere Beyspiele auf dieselben Sätze geleitet werden. Wenn A und B Zeiträume, C, D, E Begebenheiten vorstellen, und es sind die Begebenheiten D und E um die Zeiträume B und A vor der Begebenheit C vorgefallen, so hat sich die Begebenheit D um (A -- B) nach, wenn A > B, oder um (B — A) vor, wenn B > A, der Begebenheit C ereignet, und man hat daraus ebenfalls den unter 5) aufgestellten Satz.

2. Erklärung. Der Werth einer Differenz, wobey der Minuend größer als der Subtrahend ist, heißt eine positive Größe; der Werth einer Differenz hingegen, wobey der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, heißt eine negative Größe.

1) Zusatz. Da Minuend und Subtrahend Größen jeder Art seyn können, wenn sie nur gleichartig sind, und der Rest allemal mit beyden gleichartig ist, so giebt es sovielerley Arten positiver und negativer Größen, so vielerley Arten Größen es überhaupt giebt. Es giebt daher sowohl positive und negative unbenannte Zahlen, als auch positive und negative benannte Größen, z. B. positive und negative Zeiträume, positive und negative Längen u. s. w.

2) Zusatz. Bey positiven Größen kommt es augenscheinlich auf den Ueberschuß an, um welchen der Minuend

den

den Subtrahend übertrifft; übertrifft daher bey jeder von zwo positiven Größen der Minuend den Subtrahend um gleichviel, so sind sie einander gleich; z. B. 8 Thlr. — 5 Thlr. = 16 Thaler — 13 Thaler, denn beydes ist 3 Thaler. Da nun nach (1. Zus.) eine Differenz, wobey der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, allemal durch die umgekehrte Differenz erklärt werden muß, so kommt es auch bey negativen Größen blos auf den Ueberschuß an, um welchen der Subtrahend den Minuend übertrifft; übertrifft daher bey jeder von zwo negativen Größen der Subtrahend den Minuend um gleichviel, so sind sie einander gleich; z. B. 5 Thlr. — 8 Thlr. = 13 Thlr. — 16 Thlr. Denn nach 1) Zus. bedeutet (5 Thlr. — 8 Thlr.) Gewinnst soviel als (8 Thlr. — 5 Thlr.) Verlust, und (13 Thlr. — 16 Thlr.) Gewinnst soviel als (16 Thlr. — 13 Thlr.) Verlust. Nun ist gewiß (8 Thlr. — 5 Thlr.) Verlust soviel als (16 Thlr. — 13 Thlr.) Verlust, denn beydes ist 3 Thaler Verlust, also ist auch (5 Thlr. — 8 Thlr.) Gewinnst soviel als (13 Thlr. — 16 Thlr.) Gewinnst. Eben so wird bewiesen, daß (5 Thlr. — 8 Thlr.) Schulden soviel als (13 Thlr. — 16 Thlr.) Schulden sind, denn beyde bedeuten 3 Thaler Vermögen.

3) Zusatz. Hieraus ist klar, daß die in [III. Kap. 7. 3) Zus. III und 5) Zus. VI] enthaltenen Sätze, daß eine Differenz sich nicht ändert, wenn man Minuend und Subtrahend um gleichviel vermehrt oder vermindert, sowohl für negative als positive Größen wahr sind, oder daß, wenn C, D, F gleichartige Größen sind, allemal

$$(C+F)-(C+D) = F-D$$

ist, es mag nun F größer, gleich oder kleiner als D seyn. Eben so ist, wenn A, E, F gleichartige Größen, und E weder größer als A, noch größer als F ist,

$$(A-E)-(F-E) = A-F$$

es mag nun A größer, gleich, oder kleiner als F seyn. Eben

so

so verhält sichs mit der in [ebend. 5) Zus. VII) aufgestellten Gleichung

$$(A - E) - (A - F) = F - E$$

sie ist, wenn nur A weder kleiner als E, noch kleiner als F ist, richtig, es mag F größer, gleich, oder kleiner als E seyn.

4) Zusatz. Positive Größen anzudeuten, bedarf es keines eigenen Zeichens, negative aber deuten wir dadurch an, daß wir über den Ueberschuß, um welchen der Subtrahend den Minuend übertrifft, ein Sternchen setzen. So ist z. B.

$$5 \text{ Thlr.} - 8 \text{ Thlr.} = \overset{*}{3} \text{ Thlr.}$$

$$7 \text{ Jahr} - 9 \text{ Jahr} = \overset{*}{2} \text{ Jahr}$$

$$13 - 18 = \overset{*}{5}$$

5) Zusatz. Die in [1. 1) Zus.] enthaltenen Sätze lassen sich nun kurz so ausdrücken:

1) Bedeutet C eine Geldgröße, so ist $\overset{*}{C}$ Vermögen gleichbedeutend mit C Schulden, und umgekehrt $\overset{*}{C}$ Schulden ist gleichbedeutend mit C Vermögen.

2) $\overset{*}{C}$ Gewinn ist gleichbedeutend mit C Verlust, und umgekehrt $\overset{*}{C}$ Verlust ist gleichbedeutend mit C Gewinn, wenn C eine Geldgröße ist.

3) $\overset{*}{C}$ Vermehrung ist gleichbedeutend mit C Verminderung, und umgekehrt $\overset{*}{C}$ Verminderung bedeutet C Vermehrung. Sind daher A, C, D gleichartige Größen jeder Art, so ist $A + \overset{*}{C} = A - C$ und umgekehrt $D - \overset{*}{C}$ $D + C$, auch ist allemal $(A + C) - D = A + (C - D)$ und $(A + C) - D = A - (D - C)$ es mag D größer, gleich oder kleiner als C seyn.

4) $\overset{*}{C}$ Entfernung nach Morgen, ist gleichbedeutend mit

mit C Entfernung nach Abend, und umgekehrt $\overset{*}{C}$ Entfernung nach Abend ist gleichgültig mit C Entfernung nach Morgen, wenn C eine Länge ist.

5) $\overset{*}{C}$ vor ist gleichbedeutend mit C nach, und umgekehrt $\overset{*}{C}$ nach ist gleichbedeutend mit C vor, wenn C ein Zeitraum ist.

6) $a^{\overset{*}{m}} = 1 : a^m$ und umgekehrt $1 : a^{\overset{*}{m}} = a^m$, wenn a eine unbenannte ganze oder gebrochene positive Zahl, und m eine unbenannte ganze positive Zahl ist. Sind also auch p und q ganze positive Zahlen, so ist allemal

$$a^p : a^q = a^{p-q} = 1 : a^{q-p}$$

es mag q größer, gleich oder kleiner als p seyn.

6) Zusatz. Solche Beziehungen, wie Vermögen und Schulden; Gewinn und Verlust; Vermehrung und Verminderung; Entfernung nach Morgen und nach Abend; Zeit vor und nach, heißen entgegengesetzte Beziehungen, und eine negative Größe mit der einen verbunden drückt allemal soviel von der andern aus, als das umgekehrte Positive beträgt. Nicht allemal aber, wo negative Größen vorkommen, finden entgegengesetzte Beziehungen statt, wie dies z. B. bey 6) im vorigen Zusatze der Fall war. Eine negative Größe übrigens $\overset{*}{C}$ und das umgekehrte positive C heißen entgegengesetzte Größen; so ist $\overset{*}{C}$ das Entgegengesetzte von C, und umgekehrt C das Entgegengesetzte von $\overset{*}{C}$.

7) Zusatz. Um das Entgegengesetzte einer Größe anzudeuten, bedienen wir uns des Zeichens $\dot{-}$, das wir dieser Größe zur linken vorsetzen. Ist demnach C eine positive Größe, so bedeutet $\dot{-}$C das entgegengesetzte negative oder $\overset{*}{C}$. Ist aber C selbst eine negative Größe, so wird nun durch

durch $\dot{-}$ C die entgegengesetzte positive angedeutet. So ist z. B. $\dot{-}\overset{*}{3} = 3$. Weil also, im Falle C etwas Positives ist, $\dot{-}C = \overset{*}{C}$, so ergiebt sich hieraus noch ein anderes Zeichen für negative Größen; wir können sie nämlich so andeuten, daß wir vor den Ueberschuß, um welchen der Subtrahend den Minuend übertrifft, das Zeichen $\dot{-}$ setzen. So ist z. B.

$$5 \text{ Thlr.} - 8 \text{ Thlr.} = \dot{-}\, 3 \text{ Thlr.}$$
$$7 \text{ Jahr} - 9 \text{ Jahr} = \dot{-}\, 2 \text{ Jahr}$$
$$13 - 18 = \dot{-}\, 5$$

Steht aber das Zeichen $\dot{-}$ vor einer Größe, so folgt daraus noch nicht, daß der ganze Ausdruck etwas Negatives anzeige; dies findet nur dann statt, wenn die Größe, vor welcher dieses Zeichen steht, selbst positiv ist, z. B. bey $\dot{-}5$; ist aber diese Größe negativ, wie z. B. bey $\dot{-}\overset{*}{3}$, so bedeutet der ganze Ausdruck etwas Positives, wie z. B. hier 3. Ein Sternchen hingegen über einer Größe deutet allemal etwas Negatives an, denn dieses wird blos über positive Größen gesetzt.

8) Zusatz. Soll das Entgegengesetzte von einer aus mehrern Theilen bestehenden oder zusammengesetzten Größe angedeutet werden, so muß man selbige erst in Klammern einschließen, und dann das Zeichen $\dot{-}$ vorsetzen; so wird z. B. das Entgegengesetzte von $8.3 + 6 + 4$ also $\dot{-}(8.3 + 6 + 4)$, und das Entgegengesetzte von $4 + 5 - 13$ also $\dot{-}(4 + 5 - 13)$ angedeutet, und aus vorigem Zusatze erhellet, daß das erste $\overset{*}{34}$, das andere aber 4 ist.

9) Zusatz. Das Entgegengesetzte von dem Entgegengesetzten einer Größe ist diese Größe selbst, und diese Behauptung kann man, wenn A eine positive oder negative Größe bedeutet, so ausdrücken: $\dot{-}(\dot{-}A) = A$.

10) Zusatz. Die im fünften Zusatze unter 3) und 6)

an.

angeführten Gleichungen könnte man auch folgendergestalt ausdrücken:

$$A + (\dot{-} C) = A - C \qquad D - (\dot{-} C) = D + C$$
$$a^{\dot{-} m} = 1 : a^m \qquad 1 : a^{\dot{-} m} = a^m$$

So ausgedrückt sind sie aber auch richtig, wenn C eine negative mit A oder D gleichartige Größe, und m eine ganze negative unbenannte Zahl bedeuten. Bedeutet nämlich E eine positive, mithin $\dot{-}$E eine negative Größe, und erlaubt man sich in der erstern Formel C = $\dot{-}$E zu setzen, so ist nach vorigem Zusatze $\dot{-}$C = $\dot{-}$($\dot{-}$E) = E, und man erhält A + E = A — ($\dot{-}$E), deren Richtigkeit daraus erhellet, daß sie mit der zweyten bis auf die gebrauchten Buchstaben einerley ist. Setzte man eben so in der zweyten Gleichung $\dot{-}$E statt C, so erhielte man eine Gleichung, die mit der ersten bis auf die gebrauchten Buchstaben einerley ist. Eben so verhält sichs bey den beyden andern Gleichungen.

11) Zusatz. Erscheint eine Größe C in einem Falle als der Ueberschuß der Größe A über B, und in einem andern als der Ueberschuß der Größe B über A, so finden bey diesen Größen in beyden Fällen entgegengesetzte Bedingungen statt, und dies zeigt sich allemal bey ihr durch irgend eine Veränderung entweder der Beziehung, daß z. B. Vermehrung in Verminderung, Gewinnst in Verlust, und umgekehrt übergeht, oder in geometrischen Untersuchungen durch eine Veränderung der Lage der Punkte, wenn z. B. C eine gerade durch DE bezeichnete Linie ist, daß in einem Falle D zur Linken und E zur Rechten, im andern aber E zur Linken und D zur Rechten liegt, oder durch eine Veränderung irgend eines Umstandes. Jedoch ist es nothwendig, daß die Größen A und B, deren Unterschied C ist, in beyden Fällen einerley bedeuten, und nicht etwa selbst unter entgegengesetzten Bedingungen vorkommen, welches erstere an sich und in der Geometrie vorzüglich dann leicht zu übersehen ist, wenn die

die Lage der Punkte, welche A und B bestimmen, in beyden Fällen bey beyden Figuren einerley ist. Legt man dann den einen Fall zum Grunde, oder betrachtet man die Größe C, so wie sie in dem einen Falle erscheint, so kann man den andern Fall auf den ersten zurückführen, und braucht ihn nicht besonders zu betrachten, wenn man die Größe C in diesem Falle negativ nimmt, so wie man sie im ersten positiv genommen hatte. Mehrentheils ist es willkührlich, welchen von den beyden Fällen man zum Grunde legen, oder unter welcher von den beyden entgegengesetzten Bedingungen man die Größe C anfangs betrachten, das heißt, sie positiv nehmen will.

12) Zusatz. Da nach [4) Zus.] $\overset{*}{3} = 0 - 3$, so ist eine negative Größe für weniger als nichts anzusehen. Dieser Ausdruck läßt sich bey entgegengesetzten Beziehungen so erläutern: Wer 3 Thaler Schulden, oder welches nach [5) Zus. 1)] einerley ist, $\overset{*}{3}$ Thaler Vermögen hat, hat weniger Vermögen als der, der gar kein Vermögen, aber auch keine Schulden hat. Wer 3 Meilen nach Morgen, oder welches dasselbe ist, $\overset{*}{3}$ Meilen nach Abend gegangen ist, ist weniger als gar nicht nach Abend gegangen; denn wenn er wirklich einen Weg nach Abend zurückzulegen hätte, so hätte er nun mehr zu gehen, als wenn er anfangs gar nicht gegangen wäre. Eben so ist eine höhere negative Zahl kleiner als eine niedrigere, z. B. $\overset{*}{8} < \overset{*}{3}$, oder in benannten Zahlen $\overset{*}{8}$ Thlr. $<$ $\overset{*}{3}$ Thlr. denn wer $\overset{*}{8}$ Thlr. Vermögen oder 8 Thlr. Schulden hat, besitzt weniger Vermögen, als wer $\overset{*}{3}$ Thlr. Vermögen oder 3 Thlr. Schulden hat; ungeachtet beyde kein Vermögen haben. Denn bekäme jeder 10 Thaler geschenkt, so hätte der Erste dann 2 Thaler Vermögen, der Andere aber 7 Thlr. Vermögen, also dann der Erste weniger Vermögen als der Andere; da aber beyde gleichviel geschenkt bekommen haben, so muß auch vorher der Erste weniger

Ver-

Vermögen als der Andere gehabt haben. Die Ausdrücke: „Eine negative Größe ist weniger als nichts,“ und „eine höhere negative Größe ist weniger als eine niedrigere,“ sind also richtig, in so fern man bey entgegengesetzten Beziehungen die Worte weniger und nichts mit derjenigen Beziehung z. B. Vermögen verbindet, mit welcher die negativen Größen verbunden wurden.

13) Zusatz. Aus den Gleichungen

$$3 - 1 = 2$$
$$3 - 2 = 1$$
$$3 - 3 = 0$$
$$3 - 4 = \overset{*}{1}$$
$$3 - 5 = \overset{*}{2}$$
$$3 - 6 = \overset{*}{3}$$

u. s. w. erhellet, daß negative Zahlen herauskommen, wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$$

rückwärts also verlängert:

$$\ldots\overset{*}{3},\ \overset{*}{2},\ \overset{*}{1},\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$$

Da von jeden zwo Zahlen in dieser Reihe diejenige, welche weiter zur Linken steht, kleiner ist als diejenige, welche weiter zur Rechten steht, so folgt auch hieraus, daß $\overset{*}{3} < 0$ und $\overset{*}{8} < \overset{*}{3}$ ist.

Anmerkung. Eine positive Größe ist von einer gewöhnlichen Größe, dergleichen in den vorhergehenden Kapiteln betrachtet worden, ganz und gar nicht unterschieden. Man hat daher die positiven und negativen Größen nicht als eine Eintheilung der bisher betrachteten Größen, sondern vielmehr die negativen Größen, und die Lehre von den positiven und negativen Größen als eine Erweiterung der

Größen

Größen und der bisherigen Lehren, welche es blos mit gewöhnlichen oder positiven Größen zu thun hatten, anzusehen.

3. Aufgabe. Mehrere positive und negative Größen zu addiren, oder wenn A, B, E, F gleichartige positive Größen irgend einer Art, also $\overset{*}{E}$, $\overset{*}{F}$, negative Größen sind, die Summe der Größen A, B, $\overset{*}{E}$, $\overset{*}{F}$ zu finden.

Auflösung.

Die Summe ist $(A+B)-(E+F)$

Beweis.

Es seyen C, D, G, H positive Größen, die mit A, B, E, F, also auch unter sich gleichartig sind, so ist nach [2. 4) Zus. und III. Kap. 6. II]

$$A = (C+A) - C$$
$$B = (D+B) - D$$
$$\overset{*}{E} = G - (G+E)$$
$$\overset{*}{F} = H - (H+F)$$

mithin nach [2. 3) Zus. und III. Kap. 8. I]

$$A+B+\overset{*}{E}+\overset{*}{F} = (C+D+G+H+A+B)-(C+D+G+H+E+F) = (A+B)-(E+F)$$

Je nachdem nun $A+B$ größer, gleich oder kleiner als $E+F$ ist, ist die gesuchte Summe positiv, o, oder negativ.

1) Beyspiel. $5+\overset{*}{3}+11+\overset{*}{19}+\overset{*}{7}+15+\overset{*}{2}$
$=(5+11+15)-(3+19+7+2)=31=0$

2) Beyspiel. $\overset{*}{8}+\overset{*}{5}+17+\overset{*}{4}+21+10$
$=(17+21+10)-(8+5+4)=48-17=31$

3) Beyspiel. $\overset{*}{3}+6+\overset{*}{7}+\overset{*}{4}+8+2+\overset{*}{12}$
$=(6+8+2)-(3+7+4+12)=16-26=\overset{*}{10}$

1)

1) Zusatz. Mehrere blos positive Größen zu addiren, ist oben gelehrt worden, und die Summe mehrerer blos negativer Größen wird gefunden, wenn man die entgegengesetzten positiven addirt, und von der Summe das entgegengesetzte Negative nimmt.

4) Beyspiel. $4+7+18=29$

5) Beyspiel. $\overset{*}{8}+\overset{*}{11}+\overset{*}{3}=\overset{*}{22}$

2) Zusatz. Nimmt man statt aller Summanden das Entgegengesetzte von ihnen, so kommt auch das Entgegengesetzte der Summe heraus. Weil z. B.

$$8+\overset{*}{4}+3+\overset{*}{7}+\overset{*}{6}+11+\overset{*}{1}=4$$

so ist auch

$$\overset{*}{8}+4+\overset{*}{3}+7+6+\overset{*}{11}+1=\overset{*}{4}$$

Man könnte diese Wahrheit, wenn A, B, C, D gleichartige positive oder negative Größen bedeuten, allgemein so ausdrücken:

$$(\dot{-}A)+(\dot{-}B)+(\dot{-}C)+(\dot{-}D)=\dot{-}(A+B+C+D)$$

3) Zusatz. Eben so übersieht man die Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$5+7=12,\ 12+\overset{*}{5}=7,\ \overset{*}{12}+5=\overset{*}{7},\ \overset{*}{5}+\overset{*}{7}=\overset{*}{12}.$$

Man übersieht die Richtigkeit der zweyten und dritten aber auch so: Nach [2. 5) Zus.] ist

$$12+\overset{*}{5}=12-5=7, \text{ und}$$
$$\overset{*}{12}+5=5+\overset{*}{12}=5-12=\overset{*}{7}.$$

4) Zusatz. Zur Erläuterung dieser Beyspiele mag folgende Betrachtung dienen: Wenn Jemand mehrere Spiele gespielt hat, so ist der ganze Gewinnst gleich der Summe aller einzelnen Gewinnste in jedem Spiele. Diese eigentlich

für

für den Fall, wenn in allen Spielen Gewinnst statt findet, abgeleitete Regel läßt sich vermittelst negativer Größen, indem man Verlust als negativen Gewinn ansieht, auch für die Fälle, wenn in einigen oder sogar in allen Spielen Verlust statt gefunden hat, anwenden.

I. Gesetzt also eine Person habe drey Spiele gespielt, im ersten 4 Thlr. im zweyten 7 Thlr. und im dritten 8 Thlr. gewonnen, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

im ersten Spiele	4
im zweyten	7
im dritten	8

mithin nach der obigen Regel die Menge der in allen gewonnenen Thaler $4+7+8=19$. Da dies gerade der Fall ist, für welchen die gedachte Regel abgeleitet worden ist, so kommen in der angeführten auflösenden Gleichung lauter gewöhnliche oder positive Größen vor.

II. Gesetzt aber eine Person habe sechs Spiele gespielt, und im ersten 8 Thlr. verloren, im zweyten 5 Thlr. verloren, im dritten 17 Thlr. gewonnen, im vierten 4 Thlr. verloren, im fünften 21 Thlr. gewonnen, und im sechsten 10 Thlr. gewonnen, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

im ersten Spiele	$\overset{*}{8}$
im zweyten	$\overset{*}{5}$
im dritten	17
im vierten	$\overset{*}{4}$
im fünften	21
im sechsten	10

mithin nach der obigen Regel die Menge der in allen gewonnenen Thaler $\overset{*}{8}+\overset{*}{5}+17+\overset{*}{4}+21+10=31$.

III. Gesetzt eine Person habe sieben Spiele gespielt, im ersten 3 Thlr. verloren, im zweyten 6 Thlr. gewonnen, im

im dritten 7 Thlr. verloren, im vierten 4 Thlr. verloren, im fünften 8 Thlr. gewonnen, im sechsten 2 Thlr. gewonnen, und im siebenten 12 Thlr. verloren, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

im ersten Spiele	$\overset{*}{3}$
im zweyten	6
im dritten	$\overset{*}{7}$
im vierten	$\overset{*}{4}$
im fünften	8
im sechsten	2
im siebenten	$\overset{*}{12}$

mithin nach der gedachten Regel die Menge der in allen gewonnenen Thaler $\overset{*}{3}+6+\overset{*}{7}+\overset{*}{4}+8+2+\overset{*}{12}=\overset{*}{10}$, das heißt, in allen hat diese Person 10 Thlr. verloren.

IIII. Gesetzt ferner eine Person habe sieben Spiele gespielt, und im ersten 5 Thlr. gewonnen, im zweyten 3 Thlr. verloren, im dritten 11 Thlr. gewonnen, im vierten 19 Thlr. verloren, im fünften 7 Thlr. verloren, im sechsten 15 Thlr. gewonnen, und im siebenten 2 Thlr. verloren, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

im ersten Spiele	5
im zweyten	$\overset{*}{3}$
im dritten	11
im vierten	$\overset{*}{19}$
im fünften	$\overset{*}{7}$
im sechsten	15
im siebenten	2

also nach der gedachten Regel die Menge der in allen gewon-

nenen Thaler $5 + 3 + 11 + \overset{*}{19} + \overset{*}{7} + 15 + \overset{*}{2} = 0$, das heißt, diese Person hat in allen weder gewonnen noch verloren.

V. Gesetzt endlich eine Person habe drey Spiele gespielt, und im ersten 8 Thlr. im zweyten 11 Thlr. und im dritten 3 Thlr. verloren, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

im ersten Spiele	$\overset{*}{8}$
im zweyten	$\overset{*}{11}$
im dritten	$\overset{*}{3}$

also nach der gedachten Regel die Menge der in allen gewonnenen Thaler $\overset{*}{8} + \overset{*}{11} + \overset{*}{3} = \overset{*}{22}$, das heißt, diese Person hat in allen 22 Thlr. verloren.

Man sieht hieraus, wie die eigentlich für den ersten Fall, wo in allen Spielen Gewinnst statt findet, abgeleitete Regel vermittelst negativer Größen auch für die übrigen Fälle statt findet und angewendet werden kann. Man legt daher hier den ersten Fall zum Grunde, und wendet die erwähnte dafür geltende Regel vermittelst negativer Größen auch für die andern Fälle an.

Es wäre nicht nöthig gewesen, gerade den ersten Fall zum Grunde zu legen; man hätte z. B. auch den letzten Fall, wenn in allen Spielen Verlust statt findet, und für welchen die Regel gilt: „Wenn jemand mehrere Spiele gespielt hat, so ist der ganze Verlust gleich der Summe aller einzelnen Verluste in jedem Spiele,“ zum Grunde legen, und vermittelst negativer Größen, indem man Gewinn als negativen Verlust ansieht, auf die übrigen Fälle anwenden können. Dann würde für die erwähnten fünf Fälle es folgende Auflösungsgleichungen geben:

$$\overset{*}{4} + \overset{*}{7} + \overset{*}{8} = \overset{*}{19}$$

$$8 + 5 + \overset{*}{17} + 4 + \overset{*}{21} + \overset{*}{10} = \overset{*}{31}$$

3

$$3 + \overset{*}{6} + 7 + 4 + \overset{*}{8} + \overset{*}{2} + 12 = 10$$

$$5 + \overset{*}{3} + 11 + \overset{*}{19} + \overset{*}{7} + 15 + \overset{*}{2} = 0$$

$$8 + 11 + 3 = 22$$

wo also in der fünften Gleichung, welche für den zum Grunde gelegten Fall gilt, lauter positive Größen vorkommen.

5) Zusatz. Eben so verfährt man bey benannten gleichartigen Größen.

4. Lehrsatz. Eine Größe abziehen heißt die entgegengesetzte addiren, oder wenn A und C gleichartige positive oder negative Größen bedeuten, so ist

$$A - C = A + (-C)$$

Beweis.

Diese Gleichung ist eigentlich schon oben (2. 10) Zus.) erwiesen worden. Weil aber der dortige Beweis noch den Zweifel übrig lassen könnte, ob auch A eine negative Größe seyn könne, so wollen wir die Sache noch auf andere Art und ganz allgemein beweisen. Es bedeuten demnach B, D, E, F positive gleichartige Größen, so ist nach [III. Kap. 8. I und II]

$$(B - D) - (E - F) = (B + F) - (D + E) = (B - D) + (F - E)$$

Noch ein anderer Beweis ließe sich so führen: Nach [2. 3) Zus. und III. Kap. 8. I] ist

$$[(B + F) - (D + E)] + [E - F] = [B + F + E] - [D + E + F] = B - D,$$

also

$$(B - D) - (E - F) = (B + F) - (D + E) = (B - D) + (F - E)$$

5. Aufgabe. Positive und negative Größen zu subtrahiren.

Auflösung.

Man addire zu dem Minuend das Entgegengesetzte des Subtrahends.

Beweis.

Folgt aus (4).

Beyspiele.

1) $12 - 5 = 12 + \overset{*}{5} = 7$

2) $7 - 12 = 7 + \overset{*}{12} = \overset{*}{5}$

3) $\overset{*}{12} - \overset{*}{5} = \overset{*}{12} + 5 = \overset{*}{7}$

4) $\overset{*}{7} - 12 = \overset{*}{7} + 12 = 5$

5) $7 - 5 = 7 + 5 = 12$

6) $\overset{*}{7} - 5 = \overset{*}{7} + \overset{*}{5} = \overset{*}{12}$

1) Zusatz. Die Richtigkeit der ersten Gleichung ist offenbar, und die Richtigkeit der zweyten übersieht man auch aus [2. 4) Zus.] Man übersieht aber auch die Richtigkeit aller dieser Gleichungen aus den Gleichungen in [3. 3) Zus.] mit Zuziehung von [III. Kap. 6. II]. Aus der ersten der dortigen Gleichungen $5 + 7 = 12$ folgt $12 - 5 = 7$, welches die erste Gleichung hier ist. Aus der zweyten der dortigen Gleichungen $12 + \overset{*}{5} = 7$ folgt $7 - 12 = \overset{*}{5}$ und $7 - \overset{*}{5} = 12$, welches die zweyte und fünfte Gleichung hier ist. Aus der dritten der dortigen Gleichungen $\overset{*}{12} + \overset{*}{5} = \overset{*}{7}$ folgt $\overset{*}{7} - \overset{*}{12} = 5$ und $\overset{*}{7} - 5 = \overset{*}{12}$, welches die vierte und sechste Gleichung hier ist. Aus der vierten der dortigen Gleichungen endlich $\overset{*}{5} + \overset{*}{7} = \overset{*}{12}$ folgt $\overset{*}{12} - \overset{*}{5} = \overset{*}{7}$, welches die dritte Gleichung hier ist.

2) Zusatz. Außer denen in (4.) und [3. 2) Zus.] erwiesenen allgemeinen Sätzen von Summen und Differenzen positiver und negativer Größen giebt es noch einige andere.

Be-

Bedeuten nämlich A, B, C gleichartige positive oder negative Größen, so ist

I. $C + (\dot{-}A) = C - A$

II. $B - (\dot{-}A) = B + A$

III. $(\dot{-}A) + (\dot{-}B) = \dot{-}(A + B)$

IIII. $B - C = \dot{-}(C - B)$

V. $A + (\dot{-}C) = (C - A)$

VI. $(\dot{-}B) - (\dot{-}C) = C - B$

VII. $(\dot{-}C) - (\dot{-}A) = \dot{-}(C - A)$

VIII. $(\dot{-}B) - A = \dot{-}(B + A)$

Die Gleichung I ist die in (4.) enthaltene, nur in andern Buchstaben; die Gleichung III ist die in [3. 2) Zus.] enthaltene auf zwey Summanden eingeschränkt. Die Gleichung II entsteht aus I, indem man B statt C und $\dot{-}A$ statt A setzt, und ist im Grunde mit der zweyten in [2. 10) Zus.] enthaltenen Gleichung einerley, nur in andern Buchstaben ausgedrückt; man übersieht aber nun, daß hier B, oder dort D, auch negativ seyn könne, welches dort noch zweifelhaft seyn konnte. Die Gleichung IIII läßt sich so erweisen: Nach I ist $B - C = B + (\dot{-}C) = (\dot{-}C) + B$ und nach III $(\dot{-}C) + B = \dot{-}[C + (\dot{-}B)]$, und nach I wieder $C + (\dot{-}B) = C - B$, also die Sache erwiesen. Die Gleichung V wird so erwiesen: Nach I ist $A + (\dot{-}C) = A - C$, und nach IIII $A - C = \dot{-}(C - A)$. Die Gleichung VI also: Nach II ist $(\dot{-}B) - (\dot{-}C) = (\dot{-}B) + C = C + (\dot{-}B)$, und nach I $C + (\dot{-}B) = C - B$. Die Gleichung VII also: Nach VI ist $(\dot{-}C) - (\dot{-}A) = A - C$, und nach IIII $A - C = \dot{-}(C - A)$. Die Gleichung VIII endlich so: Nach I ist $(\dot{-}B) - A = (\dot{-}B) + (\dot{-}A)$, und nach III $(\dot{-}B) + (\dot{-}A) = \dot{-}(B + A)$.

3) Zusatz. Zur Erläuterung der in der Aufgabe angeführten sechs Beyspiele mag folgende Betrachtung dienen: „Wenn

„Wenn Jemand zwey Spiele gespielt hat, und es ist der Gewinnst beyder Spiele zusammen und der Gewinnst des ersten bekannt, so findet sich der Gewinnst des andern, wenn man von dem Gewinnste beyder Spiele zusammen den Gewinn des ersten Spiels subtrahirt. Diese eigentlich für den Fall, wo sowohl in beyden Spielen zusammen als auch im ersten Spiele Gewinnst statt findet, und der Gewinnst beyder Spiele zusammen größer als der Gewinnst des ersten ist, abgeleitete Regel läßt sich vermittelst negativer Größen, indem man Verlust als negativen Gewinn ansieht, auch für alle andere Fälle anwenden.

I. Gesetzt eine Person habe in beyden Spielen zusammen 12 Thlr. und im ersten 5 Thlr. gewonnen, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

in beyden Spielen zusammen 12
im ersten Spiele 5

also nach der obigen Regel die Menge der im andern Spiele gewonnenen Thaler $12 - 5 = 7$. Da dies gerade der Fall ist, für welchen die gedachte Regel abgeleitet worden ist, so kommen auch in der so eben angeführten auflösenden Gleichung lauter gewöhnliche oder positive Größen vor.

II. Gesetzt aber eine Person habe in beyden Spielen zusammen 7 Thlr. und im ersten 12 Thlr. gewonnen, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

in beyden Spielen zusammen 7
im ersten Spiele 12

also nach der obigen Regel die Menge der im andern Spiele gewonnenen Thaler $7 - 12 = \overset{*}{5}$, das heißt, diese Person hat im andern Spiele 5 Thlr. verloren.

III. Gesetzt ferner eine Person habe in beyden Spielen zusammen 12 Thlr. und im ersten 5 Thlr. verloren, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

in

in beyden Spielen zusammen $\overset{*}{12}$
im ersten Spiele $\overset{*}{5}$

also nach obiger Regel die Menge der im andern Spiele gewonnenen Thaler $\overset{*}{12} - \overset{*}{5} = \overset{*}{7}$, das heißt, diese Person hat im andern Spiele 7 Thlr. verloren.

IIII. Gesetzt eine Person habe in beyden Spielen zusammen 7 Thlr. und im ersten 12 Thlr. verloren, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

in beyden Spielen zusammen $\overset{*}{7}$
im ersten Spiele $\overset{*}{12}$

also nach der obigen Regel die Menge der im andern Spiele gewonnenen Thaler $\overset{*}{7} - \overset{*}{12} = 5$.

V. Gesetzt ferner eine Person habe in beyden Spielen zusammen 7 Thlr. gewonnen, und im ersten 5 Thlr. verloren, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

in beyden Spielen zusammen 7
im ersten Spiele $\overset{*}{5}$

also nach der obigen Regel die Menge der im andern Spiele gewonnenen Thaler $7 - \overset{*}{5} = 12$.

VI. Gesetzt endlich eine Person habe in beyden Spielen zusammen 7 Thlr. verloren, und im ersten 5 Thlr. gewonnen, so ist die Menge der gewonnenen Thaler

in beyden Spielen zusammen $\overset{*}{7}$
im ersten Spiele 5

also nach der obigen Regel die Menge der im andern Spiele gewonnenen Thaler $\overset{*}{7} - 5 = \overset{*}{12}$, das heißt, diese Person hat im andern Spiele 12 Thlr. verloren.

Man

Man sieht hieraus, wie die eigentlich für den ersten Fall, wo sowohl in beyden Spielen zusammen, als auch im ersten Gewinnst statt findet, und der Gewinnst beyder Spiele zusammen größer als der Gewinnst des ersten Spieles ist, abgeleitete Regel auch bey den übrigen Fällen statt findet und angewendet werden kann. Man legt daher hier den ersten Fall zum Grunde, und wendet die erwähnte dafür geltende Regel vermittelst negativer Größen auch für die andern Fälle an.

Es wäre nicht nöthig gewesen, gerade den ersten Fall zum Grunde zu legen, man hätte auch jeden andern Fall zum Grunde legen können. Hätte man z. B. den dritten Fall zum Grunde gelegt, wo sowohl in beyden Spielen zusammen, als auch im ersten Verlust statt findet, und der Verlust beyder Spiele zusammen größer als der Verlust des ersten ist, so fände man dafür folgende Regel: Der Verlust des andern Spieles wird gefunden, wenn man von dem Verluste beyder Spiele zusammen den Verlust des ersten Spiels abzieht. Diese Regel hätte man vermittelst negativer Größen, daß man Gewinnst als negativen Verlust ansieht, auch auf die übrigen Fälle anwenden, und also die sechs Fälle durch folgende auf Subtraction positiver und negativer Größen beruhende Gleichungen

$$\overset{*}{12} - \overset{*}{5} = \overset{*}{7}$$
$$\overset{*}{7} - \overset{*}{12} = 5$$
$$12 - 5 = 7$$
$$7 - 12 = \overset{*}{5}$$
$$7 - 5 = \overset{*}{12}$$
$$7 - \overset{*}{5} = 12$$

auflösen können, wo also in der dritten Gleichung, welche für den zum Grunde gelegten Fall dient, lauter positive Größen vorkommen.

Hätte

Hätte man den sechsten Fall zum Grunde gelegt, wo in beyden Spielen zusammen Verlust, und im ersten Gewinnst statt findet, so gäbe es dafür folgende Regel: Der Verlust des andern Spiels wird gefunden, wenn man zu der in beyden Spielen zusammen verlornen Größe die im ersten Spiele gewonnene hinzu addirt. Diese Regel hätte man vermittelst negativer Größen, daß man Gewinnst als negativen Verlust, und Verlust als negativen Gewinnst ansieht, auch auf die übrigen Fälle anwenden, und alle sechs Fälle durch folgende auf Addition positiver und negativer Größen gegründete Gleichungen

$$\overset{*}{12} + 5 = \overset{*}{7}$$

$$7 + 12 = 5$$

$$12 + 5 = 7$$

$$7 + \overset{*}{12} = \overset{*}{5}$$

$$\overset{*}{7} + 5 = 12$$

$$7 + 5 = 12$$

auflösen können, wo also in der sechsten Gleichung, welche für den zum Grunde gelegten Fall dient, lauter positive Größen vorkommen.

4) Zusatz. Eben so verfährt man, wenn Minuend und Subtrahend benannte gleichartige Größen sind.

6. Lehrsatz. I. Wenn man bey einem Producte aus zween positiven oder negativen Factoren statt eines Factors das Entgegengesetzte nimmt, den andern aber ungeändert läßt, so geht das Product auch in das Entgegengesetzte über. II. Wenn man aber statt beyder Factoren das Entgegengesetzte nimmt, so bleibt es ungeändert.

Beweis.

Nach [IIII. Kap. 5. 4) Zus.] ist, wenn k und m ganze oder auch nach [IX. Kap. 22. 2)] gebrochene positive Zahlen

len und C und B gleichartige positive Größen jeder Art bedeuten,

$$(k - m).(C - B) = (k.C + m.B) - (k.B + m.C)$$

Verwechselt man hier k und m, so erhält man

$$(m - k).(C - B) = (m.C + k.B) - (m.B + k.C)$$

Verwechselt man aber C und B, so findet sich

$$(k - m).(B - C) = (k.B + m.C) - (k.C + m.B)$$

Vergleicht man nun die erste dieser Gleichungen mit der zweyten und dritten, so ergiebt sich daraus I; vergleicht man aber die beyden letzten mit einander, so ergiebt sich II.

1) Zusatz. Bedeutet demnach m eine unbenannte ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl, und M eine positive oder negative Größe jeder Art, so ist bewiesen, daß

$$(\dot{-}m).A = \dot{-}(m.A)$$
$$m.(\dot{-}A) = \dot{-}(m.A)$$
$$(\dot{-}m).(\dot{-}A) = m.A$$

2) Zusatz. Es bedeuten α und β ganze positive Zahlen. Nach [3. 2) Zus.] ist

$$(\dot{-}A) + (\dot{-}A) + (\dot{-}A) = \dot{-}(A + A + A)$$

oder

$$3.(\dot{-}A) = \dot{-}(3.A)$$

und allgemein

$$1) \quad \alpha.(\dot{-}A) = \dot{-}(\alpha.A)$$

Setzt man nun $A = B:\alpha$, so ist $\alpha.A = B$, mithin auch

$$\alpha.[\dot{-}(B:\alpha)] = \dot{-}B$$

und nach [V. Kap. 10. I]

$$2) \quad \dot{-}(B:\alpha) = (\dot{-}B):\alpha$$

Es ist derowegen

$$\beta.[(\dot{-}B):\alpha] = \beta.[\dot{-}(B:\alpha)]$$

oder nach 1) $\quad = \dot{-}[\beta.(B:\alpha)]$

oder

oder nach [IX. Kap. 16.]

$$3)\ \frac{\beta}{\alpha}.(\dot{-}B) = \dot{-}(\frac{\beta}{\alpha}.B)$$

also übersieht man auch hieraus die Richtigkeit der zweyten Gleichung im vorigen Zusatze, jedoch nur für den Fall, wenn m eine positive ganze, wie in 1), oder gebrochene Zahl, wie in 3), ist.

7. Aufgabe. Positive und negative Größen mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire beyde Factoren mit einander, als wenn sie beyde positiv wären. Das erhaltene Product, welches offenbar positiv ist, lasse man positiv, so wie es ist, wenn beyde Factoren entweder zugleich positiv oder beyde zugleich negativ sind; ist aber ein Factor negativ, der andere positiv, so nehme man von dem Producte das entgegengesetzte Negative. Wenn nämlich m eine unbenannte ganze, oder gebrochene positive Zahl, und A eine positive Größe jeder Art bedeutet, und man setzt $m.A = P$, so ist P offenbar auch etwas Positives, und man hat

$$1)\ m.A = P$$

$$2)\ \overset{*}{m}.A = \overset{*}{P}$$

$$3)\ m.\overset{*}{A} = \overset{*}{P}$$

$$4)\ \overset{*}{m}.\overset{*}{A} = P$$

Beyspiele in Zahlen.

$5.8 = 40$, $\overset{*}{5}.8 = \overset{*}{4}0$, $5.\overset{*}{8} = \overset{*}{4}0$, $\overset{*}{5}.\overset{*}{8} = 40$.

Beweis.

Die Richtigkeit von der Gleichung 1) folgt schon aus der Annahme, und hieraus folgt die Richtigkeit von 2) und 3) nach [6. I) und von 4) nach [6. II)

1)

1) Zusatz. Eben so verfährt man, wenn der Multiplicand eine benannte positive oder negative Größe ist; der Multiplicator muß aber auch hier nothwendig eine unbenannte ganze oder gebrochene Zahl seyn. Sind aber Multiplicator und Multiplicand beydes unbenannte Zahlen, so ist es auch hier erlaubt, Multiplicator und Multiplicand mit einander zu verwechseln.

2) Zusatz. Ein Product aus mehrern Factoren, von welchen entweder einige positiv und einige negativ, oder welche alle negativ sind, hat, wenn die Anzahl der negativen Factoren gerade ist, denselben positiven Werth, als wenn alle Factoren positiv wären; den entgegengesetzten negativen aber, wenn die Anzahl der negativen Factoren ungerade ist. Weil z. B.

$$14.\ 11.\ 8.\ 17.\ 7 = 146608$$
$$13.\ 19.\ 22.\ 25.\ 9.\ 4 = 4890600$$

so ist auch

$$14.\ \overset{*}{11}.\ \overset{*}{8}.\ 17.\ \overset{*}{7} = 146608$$
$$\overset{*}{13}.\ \overset{*}{19}.\ 22.\ \overset{*}{25}.\ 9.\ \overset{*}{4} = 4890600$$
$$\overset{*}{14}.\ \overset{*}{11}.\ \overset{*}{8}.\ \overset{*}{17}.\ \overset{*}{7} = \overset{*}{146608}$$
$$\overset{*}{13}.\ \overset{*}{19}.\ \overset{*}{22}.\ \overset{*}{25}.\ \overset{*}{9}.\ \overset{*}{4} = 4890600$$

3) Zusatz. Gehen überhaupt bey einem Producte aus mehrern Factoren einige Factoren in das Entgegengesetzte über, so bleibt das Product ungeändert, wenn die Anzahl dieser Factoren gerade ist; sonst aber geht das Product auch ins Entgegengesetzte über. Wenn z. B. a, b, c, d, e unbenannte positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, so ist

$$a.(\dot{-}b).c.(\dot{-}d).e = a.b.c.d.e$$
$$(\dot{-}a).b.(\dot{-}c).(\dot{-}d).e = \dot{-}(a.b.c.d.e)$$

4) Zusatz. Eine negative ganze oder gebrochene Zahl zu einer Potenz erhoben, giebt, wenn der Exponent der Po-

tenz

tenz gerade ist, denselben positiven Werth, als wenn die Wurzel positiv wäre, den entgegengesetzten negativen aber, wenn der Exponent der Potenz ungerade ist. Weil z. B. $5^4 = 625$ und $5^3 = 125$, so ist auch $\overset{*}{5}^4 = 625$ und $\overset{*}{5}^3 = \overset{*}{125}$. Ueberhaupt sind gerade Potenzen entgegengesetzter Wurzeln einander gleich, ungerade Potenzen aber entgegengesetzt, also, wenn b eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, α aber eine positive ganze Zahl ist, so ist $(\dot{-}b)^{2\alpha} = b^{2\alpha}$ und $(\dot{-}b)^{2\alpha+1} = \dot{-}(b^{2\alpha+1})$

5) Zusatz. Versteht man unter $\sqrt[m]{a}$ jede Zahl, die die Eigenschaft hat, daß sie zur mten Potenz erhoben a giebt, und nennt man jede Größe, die entweder positiv oder negativ ist, eine mögliche Größe, so hat, wenn m eine gerade ganze positive Zahl, und a eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist, $\sqrt[m]{a}$ allemal zween mögliche und zwar entgegengesetzte Werthe; so kann z. B. $\sqrt[4]{81}$ sowohl 3 als auch $\overset{*}{3}$ seyn; denn nach vorigem Zusatze ist $3^4 = \overset{*}{3}^4 = 81$, außer diesen beyden möglichen Werthen giebt es aber keinen andern weiter. Ist aber m eine ungerade ganze positive Zahl, und a eine ganze oder gebrochene positive Zahl, so hat $\sqrt[m]{a}$ nur einen und zwar positiven möglichen Werth; so kann z. B. $\sqrt[3]{125}$ keinen andern möglichen Werth als 5 haben. Ist m eine ungerade ganze positive Zahl, und a eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so hat $\sqrt[m]{a}$ nur einen möglichen und zwar negativen Werth, so kann z. B. $\sqrt[3]{\overset{*}{125}}$ keinen andern möglichen Werth als $\overset{*}{5}$ haben. Ist endlich m eine gerade ganze positive Zahl, und a eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so hat $\sqrt[m]{a}$ gar keinen möglichen Werth; so kann z. B. $\sqrt[4]{\overset{*}{625}}$ weder 5 noch $\overset{*}{5}$ seyn, denn sowohl 5 als auch $\overset{*}{5}$ zur vierten

Po-

Potenz erhoben geben 625 und nicht $\overset{*}{625}$. Man nennt daher solche Wurzeln wie $\sqrt[4]{\overset{*}{625}}$, oder überhaupt gerade Wurzeln aus negativen Zahlen, eingebildete oder unmögliche Größen.

6) Zusatz. Bisweilen versteht man aber auch unter $\sqrt[m]{a}$ blos positive Größen, die die Eigenschaft haben, daß sie zur mten Potenz erhoben a geben; dann ist aber auch nothwendig a positiv, und $\sqrt[m]{a}$ hat dann allemal einen, aber auch nur einen positiven Werth; so hat dann z. B. $\sqrt[4]{81}$ blos den Werth 3, und eben so $\sqrt[3]{125}$ blos den Werth 5.

8. Aufgabe. Positive und negative Größen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Man dividire den Dividend durch den Divisor, als wenn sie beyde positiv wären, und lasse den erhaltenen Quotienten, welcher offenbar positiv ist, so wie er ist, positiv, wenn entweder Dividend und Divisor zugleich positiv, oder beyde zugleich negativ sind; ist aber von den beyden Größen Divisor und Dividend die eine negativ und die andere positiv, so nehme man von dem Quotienten das entgegengesetzte Negative. Diese Regel gilt für beyde Definitionen der Division. Ist nämlich m eine unbenannte ganze oder gebrochene positive Zahl, und D eine positive Größe jeder Art, und man setzt D:m=Q, so ist Q offenbar auch eine positive mit D gleichartige Größe, und nach der ersten Definition von Division

$$D:m = Q$$

$$\overset{*}{D}:m = \overset{*}{Q}$$

$$\overset{*}{D}:\overset{*}{m} = Q$$

$$D:\overset{*}{m} = \overset{*}{Q}$$

Wenn

Wenn ferner A und B gleichartige positive Größen jeder Art sind, man die andere Definition der Division zum Grunde legt, und $A;B = n$ setzt *), so ist n offenbar eine positive Zahl, und man hat

$$A;B = n$$
$$\overset{*}{A};B = \overset{*}{n}$$
$$\overset{*}{A};\overset{*}{B} = n$$
$$A;\overset{*}{B} = \overset{*}{n}$$

Beweis.

Ist $D:m = Q$, so ist $m.Q = D$, also nach (7.) auch $\overset{*}{m}\,Q = \overset{*}{D}$, $\overset{*}{m}.\overset{*}{Q} = D$, $m.\overset{*}{Q} = \overset{*}{D}$, mithin $\overset{*}{D}:\overset{*}{m} = Q$, $D:\overset{*}{m} = \overset{*}{Q}$, $\overset{*}{D}:m = \overset{*}{Q}$. Ist ferner $A;B = n$, so ist auch $A = n.B$, $\overset{*}{A} = \overset{*}{n}.B$, $A = \overset{*}{n}.\overset{*}{B}$, $\overset{*}{A} = n.\overset{*}{B}$, folglich auch $\overset{*}{A};B = \overset{*}{n}$, $A;\overset{*}{B} = \overset{*}{n}$, $\overset{*}{A};\overset{*}{B} = n$.

1) Zusatz. Bedeutet m allgemein eine ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl, und D allgemein eine positive oder negative Größe jeder Art, so ist

$$(\dot{-}D:m = \dot{-}(D;m)$$
$$D:(\dot{-}m = \dot{-}(D:m)$$
$$(\dot{-}D):(\dot{-}m) = D:m$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich, wenn m eine positive ganze Zahl ist, auch so erweisen: Nach [6. 2) Zus. 2)] ist

$$(\dot{-}B):\alpha = \dot{-}(B:\alpha)$$

ferner, wenn m eine positive gebrochene Zahl ist, also: Nach [ebend. 3)] ist

$$\frac{\beta}{\alpha}.(\ .B) = \ \cdot\frac{\beta}{\alpha}.B)$$

oder,

*) Was unter A;B verstanden wird, ist in IX. Kap. 16. 4) Zus. gezeigt worden.

oder, welches nach [IX. Kap. 16. 2) Zus.] dasselbe ist,

$$(\dot{-}B):\frac{\alpha}{\beta} = (B:\frac{\alpha}{\beta})$$

2) Zusatz. Bedeuten eben so A und B gleichartige positive oder negative Größen, so ist

$$(\dot{-}A);B = \dot{-}(A;B)$$
$$A;(\dot{-}B) = \dot{-}(A;B)$$
$$(\dot{-}A);(\dot{-}B) = A;B$$

3) Zusatz. Sind Divisor und Dividend beydes unbenannte positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen, so kommen einerley Quotienten heraus, man mag entweder die eine oder andere Definition der Division zum Grunde legen. So ist z. B.

$$40:5 = 40;5 = 8$$
$$\overset{*}{40}:5 = \overset{*}{40};5 = \overset{*}{8}$$
$$\overset{*}{40}:\overset{*}{5} = \overset{*}{40};\overset{*}{5} = 8$$
$$40:\overset{*}{5} = 40;\overset{*}{5} = \overset{*}{8}$$

oder wenn die Quotienten nicht ganze Zahlen werden,

$$3:5 = 3;5 = \tfrac{3}{5}$$
$$\overset{*}{3}:5 = \overset{*}{3};5 = \dot{-}\tfrac{3}{5}$$
$$\overset{*}{3}:\overset{*}{5} = \overset{*}{3};\overset{*}{5} = \tfrac{3}{5}$$
$$3:\overset{*}{5} = 3;5 = \dot{-}\tfrac{3}{5}$$

Negative Brüche bezeichnet man nämlich lieber durch ein vorgesetztes Zeichen $\dot{-}$, als durch ein darüber gesetztes Sternchen, weil im letzten Falle es undeutlich ist, ob das Sternchen sich auf den ganzen Bruch oder blos den Zähler desselben beziehen soll.

4) Zusatz. Ein Bruch ist nach [IX. Kap. 2) Zus.] nichts anders als was herauskommt, wenn man die Einheit durch

durch den Nenner dividirt, und den herauskommenden Quotienten mit dem Zähler multiplicirt. Hieraus ergiebt sich auch die Bedeutung von Brüchen, wo entweder der Zähler, oder der Nenner, oder beydes negative unbenannte ganze oder gebrochene Zahlen sind.

Da nämlich $1 : \frac{17}{6} = \frac{6}{17}$ und $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{17} = \frac{9}{17}$, so ist

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 : \frac{17}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{17} = \frac{9}{17}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 : \frac{17}{6}\right) = -\frac{9}{17}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{17}{6}} = \frac{3}{2} \cdot \left[1 : \left(-\frac{17}{6}\right)\right] = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{6}{17}\right) = -\frac{9}{17}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{17}{6}} = \left(-\frac{3}{2}\right)\left[1 : \left(-\frac{17}{6}\right)\right] = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{6}{17}\right) = \frac{9}{17}$$

Ein Bruch also, wo Zähler und Nenner negativ ist, hat denselben positiven Werth, als wenn Zähler und Nenner positiv wären; den entgegengesetzten negativen aber, wenn entweder der Zähler oder der Nenner allein negativ ist. Nun ist aber auch

$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}} = \frac{3}{2} : \frac{17}{6}$, also auch, wie so eben gezeigt worden,

$$\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{17}{6}} = -\left(\frac{3}{2} : \frac{17}{6}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) : \frac{17}{6}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{17}{6}} = -\left(\frac{3}{2} : \frac{17}{6}\right) = \frac{3}{2} : \left(-\frac{17}{6}\right)$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{17}{6}} = \frac{3}{2} : \frac{17}{6} = \left(-\frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{17}{6}\right)$$

also der Satz, daß Brüche Quotienten sind, deren Dividend dem Zähler, und deren Divisor dem Nenner gleich ist, auch für solche Brüche wahr, wo entweder der Zähler oder der Nenner, oder beyde zugleich negative ganze oder gebrochene Zahlen sind.

9. Bemerkung. Es ist noch nöthig zu zeigen, daß verschiedene für positive Zahlen und Größen erwiesene Sätze auch wahr verbleiben, wenn statt der positiven Größen negative gesetzt werden. Unbenannte ganze Zahlen und Brüche sollen dabey der Kürze wegen blos unbenannte Zahlen heißen.

1) Die in (III. Kap. 6. 7. 8. nebst ihren Zusätzen) enthaltenen Gleichungen bleiben alle richtig, wenn auch einer oder mehrere der darin vorkommenden Buchstaben negative Größen bedeuten. Der Beweis ist gerade so wie dort.

2) Der Satz in (IV. Kap. 4.) daß $m.n = n.m$, verbleibt auch für negative Zahlen wahr. Der Beweis ist in [7. 1) Zus.] enthalten.

3) Der Satz in (IIII. Kap. 5.) ist auch für negative Größen wahr. Denn daß die Gleichung

$$(n+m).A = n.A + m.A$$

auch richtig verbleibt, wenn n, m positive oder negative unbenannte Zahlen, und A eine positive oder negative Größe jeder Art ist, wird so erwiesen:

Es seyen a, b, c, d unbenannte positive Zahlen, B und C positive mit A gleichartige Größen, so kann man

$$\begin{aligned} A &= B - C \\ n &= a - b \\ m &= c - d \end{aligned}$$

setzen, und es ist nach dem Beweis von (3.)

$$n+m = (a+c) - (b+d)$$

und nach [IIII. Kap. 5. 4) Zus.]

$$\begin{aligned} n.A &= (a.B + b.C) - (a.C + b.B) \\ m.A &= (c.B + d.C) - (c.C + d.B) \\ (n+m).A &= [(a+c).B + (b+d).C] - [(a+c).C \\ &\quad + (b+d).B] \end{aligned}$$

folg.

folglich nach dem Beweis von (3) und [IX. Kap. 22. 2)]

$$n.A + m.A = [(a+c).B + (b+d).C] - [a+c).C + (b+d).B]$$

woraus die Sache erhellet.

Eben so wird bewiesen, daß, wenn N, M gleichartige positive oder negative Größen jeder Art, und a eine unbenannte positive oder negative unbenannte Zahl ist, die Gleichung

$$a.(N+M) = a.N + a.M$$

richtig verbleibe.

Was hier beyderseits von einer aus zween Theilen bestehenden Summe erwiesen worden, läßt sich eben so für Summen, die aus mehr Theilen bestehen, erweisen.

Auch der erste Zusatz verbleibt dann richtig, oder es sind die Gleichungen

$$(n-m).A = n.A - m.A$$
$$a.(N-M) = a.N - a.M$$

auch wahr, wenn n, m, a, N, M, A das vorhin genannte bedeuten. Der Beweis ist wie oben. Man könnte die Richtigkeit der ersten Gleichung aber auch so darthun: Man setze das Entgegengesetzte von m oder $\dot{-}m = p$, so ist nach (4.) $n - m = n + (\dot{-}m) = n + p$, also wie vorhin gezeigt worden,

$$(n-m).A = (n+p).A = n.A + p.A = n.A + (\dot{-}m).A$$

oder nach [6. 1) Zus.] $= n.A + [\dot{-}(m.A)]$

oder nach (4.) $= n.A - m.A$

Auch der zweyte Zusatz verbleibt richtig, oder es ist auch

$$(n.m).A = n.(m.A)$$

wenn n und m unbenannte positive oder negative Zahlen, und A eine positive oder negative Größe jeder Art bedeuten. Denn diese Gleichung ist nach [IX. Kap. 22. 2)] richtig, wenn n, m, A positiv sind, und dann sind die beyden gleichen Pro-

ducte auf den beyden Seiten des Gleichheitszeichens auch positiv. Eben so wie in [7. 3) Zus.] zeigt sich, daß diese beyden Producte ihren positiven Werth beybehalten, wenn unter den drey Größen n, m, A eine ihren positiven Werth beybehält, die beyden andern aber in das entgegengesetzte Negative übergehen, und daß beyde Producte in das entgegengesetzte Negative übergehen, wenn von den drey Größen n, m, A entweder zwey ihren positiven Werth beybehalten, die dritte aber in das entgegengesetzte Negative übergeht, oder wenn alle drey in das entgegengesetzte Negative übergehen.

Aber auch die in 3) und 4) Zus. enthaltenen Gleichungen

$$n.(m.A) = m.(n.A)$$
$$(n-m).(N-M) = (n.N+m.M) - (n.M+m.N)$$

bleiben dann richtig. Der Beweis ist wie oben.

4) Die in [IIII. Kap. 11. Zus. und 12. 13. 14. nebst zugehörigen Zusätzen] enthaltenen Behauptungen sind auch wahr, wenn unter den Factoren negative Zahlen vorkommen. Der Beweis läßt sich gerade wie dort führen.

5) Die in [V. Kap. 10. nebst Zusätzen] enthaltenen Behauptungen gelten auch für negative Größen, oder in den Gleichungen

$$(m.M):m = M$$
$$d.(D:d) = D$$
$$(m.n):n = m$$
$$m:(m:n) = n$$
$$(a.b.c.d.e):(b.d) = a.c.e$$

können die Buchstaben auch negative Größen bedeuten. Der Beweis ist eben so wie dort.

6) Die in [V. Kap. 11. nebst Zusätzen] enthaltenen Gleichungen

$$(A+B):m = (A:m)+(B:m)$$
$$(A-B):m = (A:m)-(B:m)$$
$$(m.A):n = m.(A:n)$$

sind

sind auch wahr, wenn A, B positive oder negative gleichartige Größen jeder Art, und m und n positive oder negative unbenannte Zahlen bedeuten. Bey den beyden ersten Gleichungen ist der Beweis wie dort. Die dritte ist nach [IX. Kap. 22.] richtig, wenn von den Größen m, n, A alle drey positiv sind; und daß sie auch wahr verbleibe, wenn einige oder alle negativ sind, läßt sich gerade so wie oben in 3) bey der Gleichung $(n.m).A = n.(m.A)$ darthun.

7) Der Lehrsatz [V. Kap. 12. nebst allen seinen Zusätzen] gilt ohne Einschränkung, wenn von den darin vorkommenden Buchstaben einige oder alle negativ sind. Der Beweis ist gerade wie dort, und eben so wie in [IX. Kap. 22. 6)] läßt sich auch die Richtigkeit der Gleichung

$$(k:n).A = A:(n:k)$$

für negative Größen darthun.

8) Die in [VII. Kap. 3. 2) Zus.] enthaltene Behauptung gilt auch für eine negative Wurzel, z. B.

$$(\div \tfrac{4}{7})^1 = \div \tfrac{4}{7}, \; (\div \tfrac{4}{7})^0 = 1.$$

Der Beweis ist wie dort.

9) Der Lehrsatz [VII. Kap. 8.] nebst seinen Zusätzen ist auch wahr, wenn die Wurzel a eine negative unbenannte Zahl ist. Der Beweis ist so wie dort.

A) Bedeuten demnach m, n, p, q ganze positive Zahlen, a aber eine unbenannte positive oder negative Zahl, so ist

$$a^m . a^n . a^p . a^q . = a^{m+n+p+q}$$

$$a^m . a^1 . a^n . a^0 . a^p . a^1 = a^{m+n+p+2}$$

$$(a^m)^n = a^{n.m}$$

und wenn m nicht kleiner als n,

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

B)

B) Wenn p nicht kleiner als q, so ist der Quotient $a^p : a^q = a^{p-q}$; ist aber q nicht kleiner als p, so ist $a^q : a = a^{q-p}$, folglich dann nach 7)

$$a^p : a^q = (a^p : a^p) : (a^q : a^p) = 1 : a^{q-p}$$

Die Ausdrücke a^{p-q} und $1 : a^{q-p}$ können demnach als gleichgültig angesehen werden, folglich ist, a mag positiv oder negativ seyn,

$$a^{\overset{*}{m}} = 1 : a^m \text{ und } a^m = 1 : a^{\overset{*}{m}}$$

welche Gleichungen, im Falle a positiv ist, schon oben [2. 5) Zus. 6)] dargethan worden, und es erhellet hieraus, was eine positive oder negative unbenannte Zahl, zu einer Potenz erhoben, deren Exponent eine ganze negative unbenannte Zahl ist, für eine Bedeutung hat. Es ist nämlich mit Zuziehung von [7. 4) Zus., 8. 1) Zus., IX. Kap. 16. 12) Zus. und ebend. 17. 1) Zus.]

$$\left(\tfrac{4}{7}\right)^{\overset{*}{3}} = 1 : \left(\tfrac{4}{7}\right)^3 = 1 : \frac{4^3}{7^3} = \frac{7^3}{4^3}$$

$$\left(\dot{-}\tfrac{4}{7}\right)^{\overset{*}{3}} = 1 : \left(\dot{-}\tfrac{4}{7}\right)^3 = 1 : \left(\dot{-}\frac{4^3}{7^3}\right) = \dot{-}\frac{7^3}{4^3}$$

$$\left(\tfrac{4}{7}\right)^{\overset{*}{6}} = 1 : \left(\tfrac{4}{7}\right)^6 = 1 : \frac{4^6}{7^6} = \frac{7^6}{4^6}$$

$$\left(\dot{-}\tfrac{4}{7}\right)^{\overset{*}{6}} = 1 : \left(\dot{-}\tfrac{4}{7}\right)^6 = 1 : \frac{4^6}{7^6} = \frac{7^6}{4^6}$$

Die in [7. 4) Zus.] enthaltene Wahrheit gilt demnach auch, wenn der Exponent negativ ist; zugleich erhellet aber auch nun, daß allemal

$$a^p : a^q = a^{p-q} = 1 : a^{q-p}$$

wenn nämlich, wie angenommen wird, a eine unbenannte positive oder negative Zahl, p und q aber ganze positive Zahlen bedeuten, es mag p größer, gleich oder kleiner als q seyn.

C)

C) Nun läßt sich aber auch zeigen, daß der Lehrsatz VII. Kap. 8. auch wahr ist, wenn die Exponenten entweder zum Theil oder ganz negative ganze Zahlen sind, und die Wurzel a eine unbenannte positive oder negative Zahl ist, oder daß die Gleichung

$$a^\alpha . a^\beta . a^\gamma = a^{\alpha+\beta+\gamma}$$

auch richtig ist, wenn α, β, γ unbenannte ganze positive oder negative Zahlen bedeuten. Denn es seyen, wie vorhin, m, n, p, q, überdies aber auch r, s ganze positive Zahlen, so kann man allemal

$$\alpha = m - n$$
$$\beta = p - q$$
$$\gamma = r - s$$

setzen, und dann ist nach dem Beweise von (3.)

$$\alpha + \beta + \gamma = (m+p+r) - (n+q+s)$$

ferner nach der letzten Gleichung in B)

$$a^\alpha = a^m : a^n, \quad a^\beta = a^p : a^q, \quad a^\gamma = a^r : a^s$$

also $\quad a^\alpha . a^\beta . a^\gamma = (a^m : a^n) . (a^p : a^q) . (a^r : a^s)$

oder nach 7) $\quad = a^m . a^p . a^r : a^n . a^q . a^s$

oder nach A) $\quad = a^{m+p+r} : a^{n+q+s}$

oder nach der letzten Gleichung in B)

$$= a^{(m+p+r) - (n+q+s)} = a^{\alpha+\beta+\gamma}$$

D) Es ist demnach auch

$$a^\beta . a^{\alpha-\beta} = a^{(\alpha-\beta)+\beta} = a^\alpha$$

folglich

$$a^{\alpha-\beta} = a^\alpha : a^\beta$$

mithin der zweyte Zusatz auch wahr, wenn die Wurzel eine unbenannte positive oder negative Zahl, und die Exponenten positive oder negative ganze unbenannte Zahlen sind.

E) Nach C) ist demnach auch

$$a^\alpha . a^\alpha . a^\alpha = a^{\alpha+\alpha+\alpha}$$

oder

oder $(a^{\alpha})^3 = a^{3.\alpha}$

und allgemein, wenn p und q ganze positive Zahlen sind,

$$(a^{\alpha})^p = a^{p.\alpha},\ (a^{\alpha})^q = a^{q.\alpha}$$

F) Bedeutet demnach, wie vorhin, β eine unbenannte ganze positive oder negative Zahl, so kann man $\beta = p - q$ setzen, und es ist nach der letzten Gleichung in B)

$$(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\alpha})^{p-q} = (a^{\alpha})^p : (a^{\alpha})^q$$

oder nach E) $= a^{p.\alpha} : a^{q.\alpha}$

oder nach D) $= a^{p.\alpha - q.\alpha}$

oder nach 3) $= a^{(p-q).\alpha} = a^{\beta.\alpha}$

folglich der dritte Zusatz auch wahr, wenn die Wurzel eine positive oder negative unbenannte Zahl, und die beyden Exponenten ganze positive oder negative Zahlen sind.

10) Der Lehrsatz [VII. Kap. 9.] ist auch wahr, wenn a, b positive oder negative Zahlen sind. Der Beweis ist so wie dort. Er ist aber auch wahr, wenn der Exponent m eine negative ganze Zahl ist; denn

nach [9) B)] ist $(a.b)^m = 1 : (a.b)^m$

oder, wie oben bemerkt worden, $= 1 : (a^m . b^m)$

oder nach 7) $= (1 : a^m).(1 : b^m)$

oder nach [9) B)] $= a^m . b^m$

Es ist demnach allemal

$$(a.b)^{\alpha} = a^{\alpha} . b^{\alpha}$$

es mögen a und b positive oder negative unbenannte Zahlen, und α eine positive oder negative ganze Zahl seyn.

Die Gleichung im ersten Zusatze

$$(c : a)^{\alpha} = c^{\alpha} : a^{\alpha}$$

ist

ist demnach auch wahr, wenn c und a positive oder negative Zahlen und α eine positive oder negative ganze Zahl ist. Der Beweis ist wie dort.

Auch die Gleichung im zweyten Zusatze

$$(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\beta})^{\alpha}$$

ist allgemein richtig, denn nach 9) F) sind beyde Glieder derselben $= a^{\alpha \cdot \beta}$.

Anwendung der bisherigen Lehren auf eine allgemeinere Betrachtung der zusammengesetzten Ausdrücke.

10. **Erklärung.** Ein Ausdruck, welcher aus mehrern gleichartigen positiven oder negativen Größen, die durch die Zeichen + und — mit einander verbunden sind, zusammengesetzt ist, wie z. B.

$$4 + \overset{*}{2} - 3 - \overset{*}{5} + \overset{*}{7} + 11 - 3 - \overset{*}{8} + 17 - \overset{*}{6},$$

heiße nun ein allgemeiner zusammengesetzter Ausdruck, oder eine allgemeine zusammengesetzte Größe. Die Bedeutung eines solchen Ausdrucks ist, wie im vorigen Kapitel; man soll nämlich zu 4 die Zahl $\overset{*}{2}$ addiren, von dem, was herauskommt, 3 subtrahiren, von dem, was nun herauskommt, $\overset{*}{5}$ subtrahiren u. s. w. nach folgender Rechnung:

$$\begin{array}{lll} 4 + \overset{*}{2} = 2 & 4 + \overset{*}{7} = \overset{*}{3} & 5 - \overset{*}{8} = 13 \\ 2 - 3 = \overset{*}{1} & \overset{*}{3} + 11 = 8 & 13 + 17 = 30 \\ \overset{*}{1} - \overset{*}{5} = 4 & 8 - 3 = 5 & 30 - \overset{*}{6} = 36 \end{array}$$

es ist demnach der Werth dieses angeführten Ausdrucks

$$4 + \overset{*}{2} - 3 - \overset{*}{5} + \overset{*}{7} + 11 - 3 - \overset{*}{8} + 17 - \overset{*}{6} = 36.$$

Eben so verfährt man bey andern Beyspielen, auch wenn statt der unbenannten Zahlen, wie hier, gleichartige Größen von irgend einer Art vorkommen.

1) Zusatz. Wie auch die positiven oder negativen Größen, aus welchen ein dergleichen Ausdruck zusammengesetzt ist, ihrer Größe nach, und ihre Vorzeichen beschaffen seyn mögen, so kann man doch nunmehr bey der Entwickelung des Werthes eines solchen Ausdrucks auf die angezeigte Art nie in Verlegenheit kommen, und es hat daher jeder solcher Ausdruck einen Werth.

2) Zusatz. Die Zwischenwerthe, auf die man nach und nach bey der angeführten Bestimmung des Werthes von einem allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke kommt, sind die Werthe der allgemeinen zusammengesetzten Ausdrücke, welche durch jede willkührliche Menge am weitesten zur Linken stehender Theile gebildet werden. So erhellet aus der angeführten Berechnung des Werthes vom vorigen Ausdrucke die Richtigkeit der Gleichungen:

$$4+\overset{*}{2}=2$$
$$4+\overset{*}{2}-3=\overset{*}{1}$$
$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}=4$$
$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}=\overset{*}{3}$$
$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11=8$$
$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11-3=5$$
$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11-3-\overset{*}{8}=13$$
$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11-3-\overset{*}{8}+17=30$$

Nun erhellet aber auch aus derselben Berechnung, daß der Werth des ganzen zusammengesetzten Ausdrucks 36 auch $8-3-\overset{*}{8}+17-\overset{*}{6}$ sey; es ist also auch mit Zuziehung der fünften von den vorigen Gleichungen

$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11-3-\overset{*}{8}+17-\overset{*}{6}$$
$$=(4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11)-3-\overset{*}{8}+17-\overset{*}{6}$$

oder

oder wörtlich: Der Werth eines allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucks ändert sich nicht, wenn man statt zwey oder mehrerer Theile am weitesten zur Linken ihren Werth setzt.

3) Zusatz. Zusammengesetzte Ausdrücke, welche wir im vorigen Kapitel anstößige nannten, gehören mit unter die jetzt erklärten allgemeinen zusammengesetzten Ausdrücke, da sie lauter positive Glieder enthalten, von denen einige additiv und die andern subtractiv sind. Es haben also dieselben allerdings einen Werth, einen positiven oder negativen; nur kommen im ersten Falle unter den Zwischenwerthen allemal eine, manchmal aber auch mehrere negative Größen vor; so hat z. B. der im vorigen Kap. 1. 1) Zus. angeführte anstößige Ausdruck

$$4+7-6+3+8-11+4-13+2+7-1$$

die Zwischenwerthe 11, 5, 8, 16, 5, 9, $\overset{*}{4}$, $\overset{*}{2}$, 5 und den Werth 4.

Eben so hat der anstößige Ausdruck

$$4-2+6+3-5-1-9+15-8+11$$

die Zwischenwerthe 2, 8, 11, 6, 5, $\overset{*}{4}$, 11, 3, und den Werth 14.

4) Zusatz. Soll zu dem Werthe eines allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucks eine positive oder negative Größe addirt werden, so braucht man selbige blos am weitesten zur Rechten mit dem Zeichen + zu schreiben; soll aber von dem Werthe eines solchen Ausdrucks eine positive oder negative Größe subtrahirt werden, so braucht man selbige ebenfalls blos am weitesten zur Rechten, jedoch mit dem Zeichen — zu schreiben. So ist z. B.

$$(8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7)+9=8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7+9$$

$$(8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7)+\overset{*}{2}=8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7+\overset{*}{2}$$

(8

$$(8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7)-5=8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7-5$$
$$(8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7)-\overset{*}{11}=8-\overset{*}{3}-7+\overset{*}{4}-6+7-\overset{*}{11}$$

wovon die Ursache im 2) Zusatze enthalten ist.

5) Zusatz. Man kann bey einem allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke, ohne das erste Glied, die Zwischenwerthe und ihre Ordnung, und den Werth desselben zu ändern, nach (4.) jeden vorkommenden subtractiven Theil in den entgegengesetzten additiven, und umgekehrt jeden vorkommenden additiven Theil, blos den am weitesten zur Linken stehenden ausgenommen, in den entgegengesetzten subtractiven Theil verwandeln, also einen und denselben zusammengesetzten Ausdruck, ohne das erste Glied, die Zwischenwerthe mit ihrer Ordnung und den Werth desselben zu ändern, auf sehr mannichfaltige Art ausdrücken. So läßt sich z. B. der allgemeine zusammengesetzte Ausdruck

$$4+\overset{*}{2}-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11-3-\overset{*}{8}+17-\overset{*}{6}$$

ohne die gedachten Stücke zu ändern, auch so darstellen:

$$4+\overset{*}{2}+\overset{*}{3}-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}-\overset{*}{11}-3+8-\overset{*}{17}-\overset{*}{6}$$
$$4-2-3-\overset{*}{5}+\overset{*}{7}+11-3-\overset{*}{8}+17-\overset{*}{6}$$
$$4-2+\overset{*}{3}+5-7-\overset{*}{11}+\overset{*}{3}-\overset{*}{8}-\overset{*}{17}+6$$

6) Zusatz. Man kann daher auch jeden allgemeinen zusammengesetzten Ausdruck, ohne die gedachten Stücke zu ändern, so ausdrücken, daß er lauter additive Glieder enthält, oder als Summe darstellen. Für den Ausdruck im vorigen Zusatze wäre diese Darstellung folgende:

$$4-\overset{*}{2}+\overset{*}{3}+5-\overset{*}{7}+11+\overset{*}{3}+8+17+6$$

7) Zusatz. Eben so kann man auch jeden solchen Ausdruck, dessen erstes additives Glied am weitesten zur Linken po-

positiv ist, ohne die gedachten Stücke zu ändern, so ausdrücken, daß er lauter positive Glieder enthält. Für den Ausdruck im 5) Zus. wäre diese Darstellung folgende:

$$4 - 2 - 3 + 5 - 7 + 11 - 3 + 8 + 17 + 6$$

und so erhält man solche zusammengesetzte Ausdrücke, dergleichen im vorigen Kapitel vorkamen.

8) Zusatz. Vergleicht man die beyden verschiedenen Darstellungen eines und desselben zusammengesetzten Ausdrucks in 6) Zus. und 7) Zus. so erhellet, daß man einen zusammengesetzten Ausdruck, dessen Theile alle positiv sind, in eine Summe verwandeln könne, wo die additiven Theile in positive, und die subtractiven in negative übergehen.

9) Zusatz. Wenn man bey einem allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke statt jedes Theiles das Entgegengesetzte nimmt, die Vorzeichen aber ungeändert läßt, so gehen sowohl sämmtliche Zwischenwerthe als auch der Werth des ganzen Ausdrucks in das Entgegengesetzte über. Da z. B. der Ausdruck

$$4 + \overset{*}{2} - 3 - \overset{*}{5} + \overset{*}{7} + 11 - 3 - \overset{*}{8} + 17 - \overset{*}{6}$$

die Zwischenwerthe $2, \overset{*}{1}, 4, \overset{*}{3}, 8, 5, 13, 30$ und den Werth 36 hat, so hat der Ausdruck

$$\overset{*}{4} + 2 - \overset{*}{3} - 5 + 7 + \overset{*}{11} - \overset{*}{3} - 8 + \overset{*}{17} - 6$$

die Zwischenwerthe $\overset{*}{2}, 1, \overset{*}{4}, 3, \overset{*}{8}, \overset{*}{5}, \overset{*}{13}, \overset{*}{30}$ und den Werth $\overset{*}{36}$. Die Ursache beruht auf [5. 2) Zus. III und VII].

11. Lehrsatz. Der Werth eines allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucks kommt heraus, wenn man von der Summe der additiven Glieder die Summe der subtractiven abzieht. Bedeuten z. B. A, B, C, D, E gleichartige positive oder negative Größen, so ist

$$A - B + C + D - E = (A + C + D) - (B + E)$$

Beweis.

Beweis.

Da in [9. 1)] gezeigt worden, daß die in (III. Kap. 7. nebst Zusätzen) enthaltenen Gleichungen auch für negative Größen wahr verbleiben, so ist nach [III. Kap. 7. 6) Zus. VIII]

$$A - B + C = (A + C) - B$$

folglich nach ebend. wenn man beyderseits D addirt,

$$A - B + C + D = (A + C + D) - B$$

und nach [III. Kap. 7. 8) Zus. X], wenn man beyderseits E abzieht,

$$A - B + C + D - E = (A + C + D) - (B + E)$$

Der Beweis läßt sich aber auch so führen: Nach [10. 6) Zus.] ist

$$A - B + C + D - E = A + (\dot{-}B) + C + D + (\dot{-}E)$$

oder, was dasselbe ist, $= (A + C + D) + [(\dot{-}B) + (\dot{-}E)]$

oder nach (3. 2) Zus. $= (A + C + D) + [\dot{-}(B + E)]$

oder nach (4.) $= (A + C + D) - (B + E)$

Beyspiel. Bey dem zusammengesetzten Ausdrucke zu Anfange von (10.)

$$4 + \overset{*}{2} - 3 - \overset{*}{5} + \overset{*}{7} + 11 - 3 - \overset{*}{8} + 17 - \overset{*}{6}$$

ist die Summe der additiven Glieder $4 + \overset{*}{2} + \overset{*}{7} + 11 + 17 = 23$, der subtractiven $3 + \overset{*}{5} + 3 + \overset{*}{8} + \overset{*}{6} = \overset{*}{13}$, und $23 - \overset{*}{13} = 36$ ist der Werth des Ausdrucks, wie auch oben gefunden wurde.

1) Zusatz. Wenn von einem allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke alle additive und subtractive Theile gegeben sind, so ist zugleich dessen Werth bekannt, und man kann selbige nach Willkühr unter einander ordnen, nur muß man allemal ein additives Glied am weitesten zur Linken setzen, und

es

es erhellet zugleich, daß der Werth eines solchen Ausdrucks sich nicht ändert, wenn man die Theile desselben nach einer willkührlichen Ordnung versetzt, wenn nur das Glied zur Linken allemal ein additives ist.

2) Zusatz. Soll zu einem gegebenen allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke eine Größe hinzu addirt werden, so kann man selbige am weitesten zur Linken vor dem zusammengesetzten Ausdrucke schreiben, und zwischen beyde das Zeichen + setzen. So ist z. B.

$$4+(7-\overset{*}{9}+\overset{*}{14}+2-15-7)=4+7-\overset{*}{9}+14$$
$$+2-\overset{*}{15}-7$$

Denn nach [10. 4) Zus.] ist

$$4+(7-\overset{*}{9}-\overset{*}{14}+2-\overset{*}{15}-7)=7-\overset{*}{9}+\overset{*}{14}$$
$$+2-\overset{*}{15}-7+4$$

und nach vorigem Zusatze

$$=4+7-\overset{*}{9}+\overset{*}{14}+2-\overset{*}{15}-7$$

3) Zusatz. Diese Größe kann selbst ein zusammengesetzter Ausdruck seyn. Es ist also z. B.

$$(5-8-\overset{*}{3}+7)+(4+11-6+\overset{*}{8})$$
$$=(5-8-\overset{*}{3}+7)+4+11-\overset{*}{6}+\overset{*}{8}$$

oder auch nach [10. 2) Zus.]

$$=5-8-\overset{*}{3}+7+4+11-\overset{*}{6}+\overset{*}{8}$$

also ist die Summe zweyer allgemeiner zusammengesetzter Ausdrücke gleich dem zusammengesetzten Ausdrucke, der entsteht, wenn die beyden vorigen neben einander geschrieben, und zwischen beyde das Zeichen + gesetzt wird. Man kann dies aber auch noch auf andere Art erweisen. Um z. B. zu zeigen, daß die Gleichung

$$(A-B+C)+(D-E-F+G-H$$
$$=A-B+C+D-E-F+G-H$$

richtig ist, kann man so schließen: Nach [10. 4) Zus.] ist

$$(A-B+C)+D = A-B+C+D$$

und wenn man beyderseits E abzieht, mit Zuziehung von (III. Kap. 7. 6) Zus. VIII)

$$(A-B+C)+(D-E)=A-B+C+D-E$$

und eben so beyderseits F abgezogen

$$(A-B+C)+(D-E-F)=A-B+C+D-E-F$$

und beyderseits G addirt, mit Zuziehung von [III. Kap. 7.]

$$(A-B+C)+(D-E-F+G) = A-B+C$$
$$+D-E-F+G$$

und beyderseits, wie vorhin, H abgezogen

$$(A-B+C)+(D-E-F+G-H)=A-B$$
$$+C+D-E-F+G-H$$

Man könnte aber auch den Beweis so führen: Nach [10. 6) Zus.] ist

$$A-B+C = A+(\div B)+C$$
$$D-E-F+G-H=D+(\div E)+(\div F)+G+(\div H)$$

also addirt

$$(A-B+C)+(D-E-F+G-H)=A+(\div B)+C+D$$
$$+(\div E)+(\div F)+G+(\div H)$$

oder nach (4.)

$$=A-B+C+D-E-F+G-H$$

Noch ein Beweis ließe sich so führen:

$$A-B+C = (A+C) - B$$
$$D-E-F+G-H = (D+G) - (E+F+H)$$

also nach [III. Kap. 8. I]

(A

$$(A-B+C)+(D-E-F+G-H)=(A+C+D+G)-(B+E+F+H)$$

oder $= A-B+C+D-E-F+G-H$

12. Aufgabe. Mehrere allgemeine zusammengesetzte Ausdrücke zu addiren, oder einen dergleichen Ausdruck anzugeben, welcher der Summe mehrerer dergleichen Ausdrücke gleich ist.

Auflösung.

Man schreibe sie neben einander, und setze zwischen jede zwo zunächst neben einander stehende das Zeichen $+$.

Beyspiel. Die gegebenen Ausdrücke seyen

$$8+\overset{*}{3}-\overset{*}{7}$$
$$\overset{*}{4}-6-\overset{*}{2}$$
$$\overset{*}{3}-\overset{*}{17}+5$$
$$5-3-\overset{*}{14}+6$$

so ist ihre Summe:

$$8+\overset{*}{3}-\overset{*}{7}+\overset{*}{4}-6-\overset{*}{2}+\overset{*}{3}-\overset{*}{17}+5+5-3-\overset{*}{14}+6$$

welches auch die Probe ausweist, denn der Werth des ersten von den gegebenen Ausdrücken ist 12, des andern $\overset{*}{8}$, des dritten 19, des vierten 22, der Werth des gefundenen Ausdrucks ist 45, und in der That ist $12+\overset{*}{8}+19+22=45$.

Beweis

Folgt aus wiederholter Anwendung von [11. 3) Zus.]

Zusatz. Nun kann auch folgendes Beyspiel aufgelöst werden: Es seyen A, B, C, D gleichartige positive oder zum Theil oder auch sämmtlich negative Größen, man verlangt die Summe folgender drey zusammengesetzter Ausdrücke:

$$5.A-7.B-3.C+8.D$$
$$9.B-2.A-7.C+14.D$$
$$17.A-2.B+8.C+24.D$$

 Hier

Hier hat man nach der Aufgabe für die Summe erst folgenden zusammengesetzten Ausdruck:

$$5.A - 7.B - 3.C + 8.D + 9.B - 2.A - 7.C + 14.D + 17.A - 2.B + 8.C - 24.D$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber noch sehr zusammenziehen. Es ist nämlich darin die Summe der additiven Glieder

$$5.A + 8.D + 9.B + 14.D + 17.A + 8.C$$

oder wenn man die Glieder, die einerley Buchstaben haben, mit einander vereinigt nach (IIII. Kap. 5.)

$$22.A + 9.B + 8.C + 22.D$$

Die Summe der subtractiven Glieder aber darin ist

$$7.B + 3.C + 2.A + 7.C + 2.B + 24.D$$

oder wenn man auch hier die Glieder, die einerley Buchstaben haben, nach [IIII. Kap. 5.] mit einander vereinigt,

$$2.A + 9.B + 10.C + 24.D$$

Es ist derowegen der Werth des gedachten Ausdrucks nach (II.)

$$(22.A + 9.B + 8.C + 22.D) - (2.A + 9.B + 10.C + 24.D)$$

oder nach [III. Kap. 7. 5) Zus. VI], indem man Minuend und Subtrahend um gleichviel, nämlich um 2.A + 9.B + 8.C + 22.D vermindert,

$$20.A - (2.C + 2.D) = 20.A - 2.C - 2.D$$

es ist demnach

$$(5.A - 7.B - 3.C + 8.D) + (9.B - 2.A - 7.C + 14.D) + (17.A - 2.B + 8.C - 24.D) = 20.A - 2.C - 2D$$

Man hätte dies aber auch so finden können: Nach [6. 1) Zus. und 10. 6) Zus.] ist der erstere für die Summe gefundene zusammengesetzte Ausdruck auch gleich

5.A

$$5.A + \overset{*}{7}.B + \overset{*}{3}.C + 8.D + 9.B + \overset{*}{2}.A + \overset{*}{7}.C + 14.D$$
$$+ 17.A + \overset{*}{2}.B + 8.C + \overset{*}{24}.D$$

Vereinigt man nun die Glieder, die einerley Buchstaben haben, miteinander, so findet man nach [IIII. Kap. 5. und gegenw. Kap. 9. 3)]

$$5.A + \overset{*}{2}.A + 17.A = (5 + \overset{*}{2} + 17).A = 20.A$$
$$\overset{*}{7}.B + 9.B + \overset{*}{2}.B = (\overset{*}{7} + 9 + \overset{*}{2}).B = 0.B = 0$$
$$\overset{*}{3}.C + \overset{*}{7}.C + 8.C = (\overset{*}{3} + \overset{*}{7} + 8).C = \overset{*}{2}.C$$
$$8.D + 14.D + \overset{*}{24}.D = (8 + 14 + \overset{*}{24}).D = \overset{*}{2}.D$$

also die Summe der gedachten drey Ausdrücke

$$20.A + \overset{*}{2}.C + \overset{*}{2}.D = 20.A - 2.C - 2.D$$

Diese angeführte Gleichung bleibt allemal wahr, wenn A, B, C, D gleichartige positive oder negative Größen bedeuten. Es seyen z. B. A, B, C, D unbenannte Zahlen, und zwar

$$A = 106, \quad B = \overset{*}{67}, \quad C = \overset{*}{53}, \quad D = 127$$

so ist

$$5.A = 530 \qquad 7.B = \overset{*}{469} \qquad 3.C = \overset{*}{159} \qquad 8.D = 1016$$
$$2.A = 212 \qquad 9.B = \overset{*}{603} \qquad 7.C = \overset{*}{371} \qquad 14.D = 1778$$
$$17.A = 1802 \qquad 2.B = \overset{*}{134} \qquad 8.C = \overset{*}{424} \qquad 24.D = 3048$$
$$20.A = 2120 \qquad 2.C = \overset{*}{106} \qquad 2.D = 254$$

mithin

$$5.A - 7.B - 3.C + 8.D = 530 - \overset{*}{469} - \overset{*}{159} + 1016 = 2174$$
$$9.B - 2.A - 7.C + 14.D = \overset{*}{603} - 212 - \overset{*}{371} + 1778 = 1334$$
$$17.A - 2.B + 8.C - 24.D = 1802 - \overset{*}{134} + \overset{*}{424} - 3048 = \overset{*}{1536}$$
$$20.A - 2.C - 2.D = 2120 - \overset{*}{106} - 254 = 1972$$

und in der That ist $2174 + 1334 + \overset{*}{1536} = 1972$

13. Aufgabe. Von einem allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke einen andern abzuziehen, oder einen allgemeinen zusammengesetzten Ausdruck anzugeben, welcher dem Unterschiede zweyer dergleichen Ausdrücke gleich ist.

Auflösung.

Man setze den Minuend ungeändert hin, verwandele die additiven Theile des Subtrahends in subtractive, die subtractiven in additive, und setze sie so nach der Ordnung zur Rechten des Minuends. So ist z. B.

$$(A-B+C)-(D-E-F+G-H)=A-B+C-D+E+F-G+H$$

Beweis.

Nach [10. 4) Zus.] ist

$$(A-B+C)-D=A-B+C-D$$

also wenn man mit Zuziehung von (III. Kap. 7. 7) Zus. IX) beyderseits E addirt,

$$(A-B+C)-(D-E)=A-B+C-D+E$$

und eben so beyderseits F addirt,

$$(A-B+C)-(D-E-F)=A-B+C-D+E+F$$

und beyderseits G abgezogen, mit Zuziehung von [III. Kap. 7. 8) Zus. X)

$$(A-B+C)-(D-E-F+G)=A-B+C-D+E+F-G$$

und wieder beyderseits, wie vorhin, H addirt,

$$(A-B+C)-(D-E-F+G-H)=A-B+C-D+E+F-G+H$$

Man könnte die Sache aber auch so erweisen: Nach (4.) ist

$$(A-B+C)-(D-E-F+G-H)=(A-B+C)+[-(D-E-F+G-H)]$$

oder

oder nach (10. 9) Zus.

$$=(A-B+C)+[(\dot{-}D)-(\dot{-}E)-(\dot{-}F)+(\dot{-}G)$$
$$-(\dot{-}H)$$

oder nach [11. 3) Zus.]

$$=A-B+C+(\dot{-}D)-(\dot{-}E)-(\dot{-}F)+(\dot{-}G$$
$$-(\dot{-}H)$$

oder nach [10. 5) Zus.]

$$=A-B+C-D+E+F-G+H$$

Noch ein Beweis wäre dieser: Nach (11.) ist

$$A-B+C=(A+C)-B$$
$$D-E-F+G-H=(D+G)-(E+F+H)$$

also nach [III. Kap. 8. II]

$$(A-B+C)-(D-E-F+G-H)=(A+C+E$$
$$+F+H)-(B+D+G)$$

oder nach (11.)

$$=(A-B+C-D+E+F-G+H$$

Beyspiel.

$$(8-\overset{*}{14}+\overset{*}{17}+13-\overset{*}{9}-7+\overset{*}{16})-(\overset{*}{10}+6-4$$
$$+\overset{*}{23}-18)$$
$$=8-\overset{*}{14}+\overset{*}{17}+13-\overset{*}{9}-7+\overset{*}{16}-\overset{*}{10}-6$$
$$+4-\overset{*}{23}+18$$

Dieses zeigt auch die Probe, denn der Werth des gegebenen Minuends ist 4, des gegebenen Subtrahends ist $\overset{*}{49}$, des gefundenen Restes 53, und in der That ist $4-\overset{*}{49}=53$.

1) Zusatz. Da man nach [11. 1) Zus.] die Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks, ohne den Werth desselben zu ändern, nach Willkühr versetzen kann, wenn nur das erste Glied am weitesten zur Linken ein additives ist, so erhält man auch

auch den Rest, wenn man den Minuend ungeändert läßt, die additiven Theile des Subtrahends in subtractive, und umgekehrt die subtractiven in additive verwandelt, und sie so in umgekehrter Ordnung zur Rechten des Minuends setzt. So findet sich bey vorigem Beyspiele der Rest

$$8 - \overset{*}{14} + \overset{*}{17} + 13 - \overset{*}{9} - 7 + \overset{*}{16} + 18 - \overset{*}{23}$$
$$+ 4 - 6 - \overset{*}{10}$$

Man kann aber auch für diese Anordnung der Theile die Sache noch auf eine andere Art, nämlich so beweisen: Nach [III. Kap. 7. 9) Zus. XI] ist

$$(A - B - C) - (D - E - F + G - H) = (A - B$$
$$- C + H) - (D - E - F + G)$$

oder nach [ebend. 8) Zus. X]

$$= (A - B - C + H - G) - (D - E - F)$$

nach [ebend. 9) Zus. XI]

$$= (A - B - C + H - G + F) - (D - E)$$
$$= (A - B - C + H - G + F + E) - D$$

nach [10. 4) Zus.]

$$= A - B - C + H - G + F + E - D$$

2) Zusatz. Wenn bey einem allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucke die Theile selbst dergleichen Ausdrücke sind, so läßt sich sein Werth auch durch einen zusammengesetzten Ausdruck darstellen, welcher entsteht, wenn bey den additiven Haupttheilen die einfachen Theile und ihre Ordnung bleiben wie sie sind, bey den subtractiven Haupttheilen hingegen die additiven einfachen Theile in subtractive, die subtractiven aber in additive verwandelt, und entweder nach ihrer Ordnung, oder auch in umgekehrter Ordnung geschrieben werden. So ist z. B.

(6

$$(6-7+3-8)-(\overset{*}{4}-\overset{*}{3}-6+2+\overset{*}{1})-(11+\overset{*}{8}-\overset{*}{23}-16)$$
$$+(5-3+\overset{*}{9})$$
$$=6-7+\overset{*}{3}-8-\overset{*}{4}+\overset{*}{3}+6-2-\overset{*}{1}-11-\overset{*}{8}+\overset{*}{23}$$
$$+16+5-3+\overset{*}{9}$$

oder auch

$$=6-7+\overset{*}{3}-8-\overset{*}{1}-2+6+\overset{*}{3}-\overset{*}{4}+16+\overset{*}{23}$$
$$-\overset{*}{8}-11+5-3+\overset{*}{9}$$

3) Zusatz. Nun können wir auch folgendes Beyspiel auflösen: Es seyen A, B, C, D gleichartige positive oder zum Theil oder auch sämmtlich negative, jedoch gleichartige Grössen, man soll folgenden zusammengesetzten Ausdruck, dessen Theile selbst zusammengesetzte Ausdrücke sind,

$$(3.A-2.B-C-6.D)+(7.B-4.C-3.A+9.D)$$
$$-(8.D-7.C-3.A)+(13.A-4.D-11.B)-(6.A$$
$$+3.C-4.B+12.D)$$

in einen andern verwandeln, wo jeder Buchstabe nur einmal vorkommt, und keine Klammern gebraucht werden.

Nach vorigem Zusatze ist der Werth des so eben angeführten Ausdrucks auch gleich dem zusammengesetzten Ausdrucke

$$3.A-2.B-C-6.D+7.B-4.C-3.A+9.D$$
$$-8.D+7.C+3.A+13.A-4.D-11.B-6.A$$
$$-3.C+4.B-12.D$$

und dieser Ausdruck läßt sich gerade auf die Art wie der in (12, Zus.) in folgenden zusammenziehen:

$$10.A-2.B-C-21.D$$

welches also der verlangte ist.

14. Aufgabe. Das Product zweyer Factoren, wovon der eine einfach, der andere aber ein allgemeiner zusammen-

mengesetzter Ausdruck ist, durch einen allgemeinen zusammengesetzten Ausdruck darzustellen.

Auflösung.

Man setze die Producte aus dem einfachen Factor in jeden Theil des zusammengesetzten Factors nach ihrer Ordnung hin, und nehme jedes derselben additiv oder subtractiv, je nachdem der multiplicirte Theil des zusammengesetzten Factors darin additiv oder subtractiv war.

Wenn z. B. die Buchstaben a, b, c, d, e positive oder negative unbenannte Zahlen, A aber eine positive oder negative Größe jeder Art bedeutet, so ist

$$\text{I. } (a - b - c + d - e).A = a.A - b.A - c.A + d.A - e.A$$

Eben so wenn die Buchstaben A, B, C, D, E gleichartige positive oder negative Größen jeder Art, a aber eine unbenannte positive oder negative Zahl bedeutet, so ist

$$\text{II. } a.(A - B - C + D - E) = a.A - a.B - a.C + a.D - a.E$$

Beweis.

Nach [IIII. Kap. 5. und ebend. 1) Zus.] wie auch nach [gegenw. Kap 9. 3)] ist

$$(a - b).A = a.A - b.A$$

also beyderseits c.A abgezogen,

$$(a - b - c).A = a.A - b.A - c.A$$

und beyderseits d.A addirt,

$$(a - b - c + d).A = a.A - b.A - c.A + d.A$$

und wieder beyderseits e.A abgezogen,

$$(a - b - c + d - e).A = a.A - b.A - c.A + d.A - e.A$$

welches die Formel I war.

Man

Man hätte aber auch den Beweis dafür so führen können:

Nach [10. 6) Zus.] ist

$$(a - b - c + d - e).A = [a + (\,.\,b) + (\dot{-}c) + d + (\dot{-}e).].A$$

oder nach [IIII. Kap. 5. und gegenw. Kap. 9. 3)]

$$= a.A + (\dot{-}b).A + (\dot{-}c).A + d.A + (\dot{-}e).A$$

oder nach [6. 1) Zus.]

$$= a.A + [\dot{-}(b.A)] + [\dot{-}(c.A)] + d.A + [\dot{-}(e.A)$$

oder nach (4.)

$$= a.A - b.A - c.A + d.A - e.A$$

Eben so ist der Beweis bey der Formel II.

15. Aufgabe. Das Product aus zween allgemeinen zusammengesetzten Ausdrücken durch einen allgemein zusammengesetzten Ausdruck darzustellen.

Auflösung.

Man setze die Producte aus dem ersten Theile des einen Factors in jeden Theil des andern nach ihrer Ordnung hin, daneben zur Rechten setze man wieder die Producte aus dem andern Theile des ersten Factors in jeden Theil des andern, und verrichte eben dasselbe mit dem dritten, vierten u. s. w. bis letzten Theile des ersten Factors. Diejenigen Producte, deren beyde Factoren additiv oder beyde subtractiv waren, nehme man additiv, oder setze ihnen (mit Ausschluß des am weitesten zur Linken stehenden, welches allemal additiv ist, das Zeichen + vor; diejenigen aber, bey denen ein Factor additiv, und der andere subtractiv ist, nehme man subtractiv, oder setze ihnen das Zeichen — vor. Der dadurch entstehende zusammengesetzte Ausdruck ist das Product der beyden gegebenen

benen Factoren. Willkührlich ist es übrigens, welchen von den beyden Factoren man für den ersten annehmen will.

Beyspiel. Wenn A, B, C, D, E gleichartige positive oder negative Größen jeder Art, a, b, c, d aber positive oder negative unbenannte Zahlen bedeuten, so findet man das Product

$$(a - b + c - d).(A + B - C - D + E)$$
$$= a.A + a.B - a.C - a.D + a.E - b.A - b.B + b.C + b.D - b.E + c.A + c.B - c.C - c.D + c.E - d.A - d.B + d.C + d.D - d.E$$

wenn man den Multiplicator für den ersten Factor annimmt. Nimmt man aber den Multiplicand für den ersten Factor an, so erhält man für selbiges folgenden Ausdruck:

$$a.A - b.A + c.A - d.A + a.B - b.B + c.B - d.B - a.C + b.C - c.C + d.C - a.D + b.D - c.D + d.D + a.E - b.E + c.E - d.E$$

Beweis.

Man bezeichne den Werth des allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucks, der den Multiplicand ausmacht, durch V, oder es sey

$$V = A + B - C - D + E$$

so ist nach (14.)

$$a.V = a.A + a.B - a.C - a.D + a.E$$
$$b.V = b.A + b.B - b.C - b.D + b.E$$
$$c.V = c.A + c.B - c.C - c.D + c.E$$
$$d.V = d.A + d.B - d.C - d.D + d.E$$

ferner

$$(a - b + c - d).(A + B - C - D + E = (a - b + c - d).V$$
$$= a.V - b.V + c.V - d.V$$
$$= (a.A + a.B - a.C - a.D + a.E) - (b.A + b.B - b.C - b.D + b.E) + (c.A + c.B - c.C - c.D + c.E) - (d.A + d.B - d.C - d.D + d.E)$$

oder

oder nach [13. 2) Zus.]

$= a.A + a.B - a.C - a.D + a.E - b.A - b.B + b.C + b.D - b.E + c.A + c.B - c.C - c.D + c.E - d.A - d.B + d.C + d.D - d.E$

und dies war der erste Ausdruck für das Product. Für den andern Ausdruck ist der Beweis im Wesentlichen wie hier, wenn man nur den Werth des allgemeinen zusammengesetzten Ausdrucks, der den Multiplicator ausmacht, durch v bezeichnet, oder $a - b + c - d = v$ setzt.

Die Gleichheit der beyden für das Product gefundenen zusammengesetzten Ausdrücke erhellet auch aus [11. 1) Zus.], da beyde einerley additive und subtractive Glieder enthalten. Sämmtliche Glieder beyder Ausdrücke nämlich sind die Producte, die entstehen, wenn jeder Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern Factors multiplicirt wird. Ein Product, dessen beyde Factoren additiv sind, wie z. B. hier c.E, erscheint allemal als additiver einfacher Theil in einem additiven Haupttheile, wird also nach [13. 2) Zus.] allemal additiv, wenn die Klammern wegfallen. Ein Product, dessen beyde Factoren subtractiv sind, wie z. B. b.D, erscheint allemal als subtractiver einfacher Theil in einem subtractiven Haupttheile, wird also auch additiv, wenn die Klammern wegfallen; ein Product aber, wobey ein Factor additiv, der andere subtractiv ist, wie z. B. c.D oder b.E, erscheint entweder als subtractiver einfacher Theil in einem additiven Haupttheile, oder als additiver einfacher Theil in einem subtractiven Haupttheile, wird also allemal subtractiv, sobald die Klammern wegfallen.

Die Sache läßt sich aber auch so beweisen: Aus (IIII. Kap. 5.) folgt unmittelbar, daß, wenn beyde Factoren eines Products Summen von zween oder mehrern Theilen sind, das Product gleich der Summe der Producte ist, die herauskommen, wenn jeder Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern multiplicirt wird. Nun ist nach [10. 6) Zus.]

a —

$$a - b + c - d = a + (\dot{-} b) + c + (\dot{-} d).$$

$$A + B - C - D + E = A + B + (\dot{-} C) + (\dot{-} D) + E$$

also

$$(a - b + c - d).(A + B - C - D + E)$$
$$= a.A + a.B + a.(\dot{-} C) + a.(\dot{-} D) + a.E + (\dot{-} b).A$$
$$+ (\dot{-} b).B + (\dot{-} b).(\dot{-} C) + (\dot{-} b).(\dot{-} D) + (\dot{-} b).E$$
$$+ c.A + c.B + c.(\dot{-} C) + c.(\dot{-} D) + c.E + (\dot{-} d).A$$
$$+ (\dot{-} d).B + (\dot{-} d).(\dot{-} C) + (\dot{-} d).(\dot{-} D) + (\dot{-} d).E$$

oder nach [6. 1) Zus.]

$$= a.A + a.B + [\dot{-}(a.C)] + [\dot{-}(a.D)] + a.E + [\dot{-}(b.A)]$$
$$+ [\dot{-}(b.B)] + b.C + b.D + [\dot{-}(b.E)] + c.A \dot{+} c.B$$
$$\dot{+} [\dot{-}(c.C)] \dot{+} [\dot{-}(c.D)] \dot{+} c.E \dot{+} [\dot{-}(d.A)] \dot{+} [\dot{-}(d.B)]$$
$$\dot{+} d.C \dot{+} d.D \dot{+} [\dot{-}(d.E)]$$

oder nach (4.)

$$= a.A \dot{+} a.B - a.C - a.D \dot{+} a.E - b.A - b.B$$
$$\dot{+} b.C \dot{+} b.D - b.E \dot{+} c.A \dot{+} c.B - c.C - c.D$$
$$\dot{+} c.E - d.A - d.B \dot{+} d.C \dot{+} d.D - d.E$$

Noch ein Beweis wäre folgender: Vermöge (11) ist

$$a - b \dot{+} c - d = (a \dot{+} c) - (b \dot{+} d)$$
$$A \dot{+} B - C - D \dot{+} E = (A \dot{+} B \dot{+} E) - (C \dot{+} D)$$

mithin nach [III. Kap. 5. (4) Zus. und geg. Kap. 9. 3)]

$$(a - b + c - d).(A + B - C - D + E) =$$
$$[(a + c).(A \dot{+} B \dot{+} E) \dot{+} (b \dot{+} d).(C \dot{+} D)] - [(a \dot{+} c).(C \dot{+} D)$$
$$\dot{+} (b \dot{+} d).(A \dot{+} B \dot{+} E)] = [a.A \dot{+} a.B \dot{+} a.E \dot{+} c.A$$
$$\dot{+} c.B \dot{+} c.E \dot{+} b.C \dot{+} b.D \dot{+} d.C \dot{+} d.D] - [a.C \dot{+} a.D$$
$$\dot{+} c.C \dot{+} c.D \dot{+} b.A \dot{+} b.B \dot{+} b.E \dot{+} d.A \dot{+} d.B \dot{+} d.E]$$

welcher Ausdruck mit Zuziehung von (11.) eben das giebt.

Um

Um ein Beyspiel in Zahlen anzuführen, so soll der Ausdruck $\overset{*}{5} - 4 - \overset{*}{13}$ mit folgendem $8 - \overset{*}{3} + \overset{*}{17} - 15$ multiplicirt werden, und man findet

$$(\overset{*}{5} - 4 - \overset{*}{13}).(8 - \overset{*}{3} - \overset{*}{17} - 15) = \overset{*}{5}.8 - \overset{*}{5}.\overset{*}{3} + \overset{*}{5}.\overset{*}{17}$$
$$- \overset{*}{5}.15 - 4.8 + 4.\overset{*}{3} - 4.\overset{*}{17} \underset{\wedge}{+} 4.15 - \overset{*}{13}.8 \underset{\wedge}{+} \overset{*}{13}.\overset{*}{3}$$
$$- \overset{*}{13}.\overset{*}{17} \underset{\wedge}{+} \overset{*}{13}.15 = \overset{*}{40} - 15 \underset{\wedge}{+} 85 - \overset{*}{75} - 32 \underset{\wedge}{+} \overset{*}{12}$$
$$- \overset{*}{68} + 60 - \overset{*}{104} + 39 - \overset{*}{221} + 195.$$

Der Werth dieses letzten zusammengesetzten Ausdrucks findet sich 84, des ersten Factors 4, des andern $\overset{*}{21}$, und in der That ist $4.\overset{*}{21} = \overset{*}{84}$.

Zusatz. Nun lassen sich auch folgende Beyspiele leicht auflösen:

1) Beyspiel. Es bedeuten a, b, c unbenannte positive oder negative Zahlen, man soll das Product

$$(3.a - 7.b - 4.c).(9.a - 11.b \underset{\wedge}{+} 8.c)$$

in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man für das Product folgenden zusammengesetzten Ausdruck:

$$27.a.a - 33.a.b \underset{\wedge}{+} 24.a.c - 63.a.b \underset{\wedge}{+} 77.b.b - 56.b.c$$
$$- 36.a.c \underset{\wedge}{+} 44.b.c - 32.c.c$$

welcher sich aber auf eine ähnliche Art, wie der in [12) Zus. und 13. 3) Zus.] in folgenden zusammenziehen läßt:

$$27.a.a - 96.a.b - 12.a.c \underset{\wedge}{+} 77.b.b - 12.b.c$$
$$- 32.c.c$$

Es ist demnach

$$(3.a - 7.b - 4.c).(9.a - 11.b + 8.c) = 27.a.a - 96a.b$$
$$- 12.a.c + 77.b.b - 12.b.c - 32.c.c$$

Es ist sehr gewöhnlich, Producte aus zween oder mehrern Factoren blos dadurch anzudeuten, daß man die Factoren, ohne, wie bisher geschehen, dazwischen gesetzte Punkte neben einander schreibt. So schreibt man z. B. statt $3.a$ blos $3a$ statt $96.a.b$ blos $96ab$, statt $(3.a - 7.b - 4.c)(9.a - 11.b, + 8.c)$ blos $(3a - 7b - 4c)(9a - 11b + 8c)$ u. s. w. In den Fällen aber, wo durch Weglassung der Punkte ein anderer Sinn herauskäme, dürfen die Punkte nicht weggelassen werden; so kann man z. B. das Product der beyden Zahlen 7 und 3 nicht etwa durch 37 oder 73 ausdrücken, weil dieses etwas ganz anders andeutet, sondern hier müssen die Punkte beybehalten und das Product entweder durch 3.7 oder 7.3 angedeutet werden. Daher kommt es auch, daß, wenn statt der Buchstaben bestimmte Zahlen gesetzt werden, die weggelassenen Punkte manchmal wiederhergestellt werden müssen. Setzt man z. B. in dem Ausdrucke $3a$ statt a die Zahl 7, so muß das, worein dann $3a$ übergeht, nicht durch 37, sondern durch 3.7 angedeutet werden.

Durch diese Verkürzung kann die angeführte Gleichung auch so ausgedrückt werden:

$$(3a - 7b - 4c)(9a - 11b + 8c) = 27aa - 96ab - 12ac + 77bb - 12bc - 32cc$$

oder, welches einerley ist,

$$(3a - 7b - 4c)(9a - 11b + 8c) = 27a^2 - 96ab - 12ac + 77b^2 - 12bc - 32c^2$$

2) Beyspiel. Man soll $(a + b)^2$ oder $(a + b)(a + b)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Man findet

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ab + bb$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3)

3) Beyspiel. Man soll $(a+b)^3$ oder $(a+b)(a+b)^2$, oder wie aus vorigem Beyspiele erhellet, $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man

$$(a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b$$
$$+2ab^2+b^3$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Eben so könnte man $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ u. s. w. in zusammengesetzte Ausdrücke verwandeln.

4) Beyspiel. Man soll $(a-c)^2$ oder $(a-c)(a-c)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Man findet

$$(a-c)(a-c) = aa-ac-ac+cc$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a-c)^2 = a^2-2ac+c^2$$

5) Beyspiel. Man soll $(a-c)^3$ oder $(a-c)(a-c)^2$, oder wie aus vorigem Beyspiele erhellet, $(a-c)(a^2-2ac+c^2)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man

$$(a-c)(a^2-2ac+c^2 = a^3-2a^2c+ac^2$$
$$-a^2c+2ac^2-c^3$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a-c)^3 = a^3-3a^2c+3ac^2-c^3$$

Eben so könnte man $(a-c)^4$, $(a-c)^5$ u. s. w. in zusammengesetzte Ausdrücke verwandeln.

6) Beyspiel. Man soll $(a-b)(a+b)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Man findet

$$(a-b)(a+b) = aa+ab-ab-bb$$

oder

oder durch Zusammenziehung

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

7) Beyspiel. Man soll $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b$$
$$- ab^2 - b^3$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

8) Beyspiel. Man soll $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3$$
$$- a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4.$$

Auf eine ähnliche Art findet man, daß

$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = a^5 - b^5$$
$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5) = a^6 - b^6$$

u. s. w. sey. Hieraus sieht man, daß allgemein, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}$$
$$+b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

9) Beyspiel. Man soll $(a+c).(a^2-ac+c^2)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man

$$(a+c)(a^2-ac+c^2) = a^3 - a^2c + ac^2 + a^2c$$
$$- ac^2 + c^3$$

oder

oder durch Zusammenziehung

$$(a+c)(a^2-ac+c^2) = a^3+c^3$$

10) Beyspiel. Man soll $(a+c)(a^3-a^2c+ac^2-c^3)$ in einen zusammengesetzten Ausdruck verwandeln. Mit Zuziehung von [9. 4)] findet man

$$(a+c)(a^3-a^2c+ac^2-c^3) = a^4-a^3c+a^2c^2$$
$$-ac^3+a^3c-a^2c^2+ac^3-c^4$$

oder durch Zusammenziehung

$$(a+c)(a^3-a^2c+ac^2-c^3) = a^4-c^4$$

Auf eine ähnliche Art findet man, daß

$$(a+c)(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4) = a^5+c^5$$
$$(a+c)(a^5-a^4c+a^3c^2-a^2c^3+ac^4-c^5)=a^6-c^6$$

u. s. w. sey. Hieraus sieht man, daß allgemein, wenn n eine ganze positive gerade Zahl bedeutet,

$$(a+c)(a^n-a^{n-1}c+a^{n-2}c^2 - \cdots + a^2c^{n-2}$$
$$-ac^{n-1}+c^n)=a^{n+1}+c^{n+1}$$

wenn aber n eine ungerade ganze Zahl bedeutet,

$$(a+c)(a^n-a^{n-1}c+a^{n-2}c^2-\ldots-a^2c^{n-2}+ac^{n-1}$$
$$-c^n) = a^{n+1}-c^{n+1}$$

sey.

Jede der in diesen Beyspielen aufgestellten Gleichungen enthält einen besondern Lehrsatz, welchen man auch wörtlich ausdrücken könnte, und wo immer einer wichtiger als der andere ist. Der in der Gleichung des zweyten Beyspiels enthaltene Lehrsatz kann wörtlich also ausgedrückt werden: Das Quadrat einer aus zween Theilen bestehenden Summe kommt heraus, wenn man das Quadrat des ersten Theils, das Zweyfache des Products beyder Theile, und das Quadrat des zweyten Theils zusammen addirt, und

 wir

wir werden davon in der Folge bey der Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel Gebrauch machen. Eben so kann der in der Gleichung des dritten Beyspiels enthaltene Lehrsatz wörtlich also ausgedrückt werden: Der Würfel einer aus zween Theilen bestehenden Summe kommt heraus, wenn man den Würfel des ersten Theils, das Dreyfache des Products aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten Theil, das Dreyfache des Products aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten Theils, und den Würfel des zweyten Theils zusammen addirt, und man macht davon bey der Lehre von der Ausziehung der Cubikwurzel Gebrauch. Der in der Gleichung des sechsten Beyspiels enthaltene Lehrsatz, welcher wörtlich also ausgedrückt werden könnte: Wenn man die Summe zwoer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so kommt der Unterschied der Quadrate dieser Zahlen heraus, wird auch sehr häufig gebraucht.

2) Zusatz. Wenn c eine positive oder negative unbenannte Zahl bedeutet, so ist auch $\dot{-}c$ eine solche; man kann daher in den Gleichungen des 2), 3), 7) und 8) Beyspiels $b = \dot{-}c$ setzen. Dann ist nach [7. 4) Zus.] $b^2 = c^2$, $b^4 = c^4$ u. s. w. aber $b^3 = \dot{-}(c^3)$, $b^5 = \dot{-}(c^5)$, $b^7 = \dot{-}(c^7)$ u. s. w. also auch $3ab^2 = 3ac^2$, $ab^2 = ac^2$, $2ab = \dot{-}(2ac)$, $3a^2b = \dot{-}(3a^2c)$, $ab = \dot{-}(a.c)$, $a^2b = \dot{-}(a^2c)$, und die Gleichungen des 2) 3) 7) 8) Beyspiels gehen in folgende über:

$$[a+(\dot{-}c)]^2 = a^2 + [\dot{-}(2ac)] + c^2$$

$$[a+(\dot{-}c)]^3 = a^3 + [\dot{-}(3a^2c)] + 3ac^2 + [\dot{-}(c^3)]$$

$$[a-(\dot{-}c)][a^2 + [\dot{-}(a.c)] + c^2] = a^3 - [\dot{-}(c^3)]$$

$$[a-(\dot{-}c)]\Big[a^3 + [\dot{-}(a^2c)] + ac^2 + [\dot{-}(c^3)]\Big] = a^4 - c^4$$

oder

oder nach (4.)

$$(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$$
$$(a - c)^3 = a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$$
$$(a + c)(a^2 - ac + c^2) = a^3 + c^3$$
$$(a + c)(a^3 - a^2c + ac^2 - c^3) = a^4 - c^4$$

Dies sind aber die Gleichungen des 4) 5) 9) und 10) Beyspiels, also lassen sich diese aus jenen ableiten.

3) Zusatz. Hieraus erhellet, wie leicht und bequem durch Hülfe der vorhergehenden Lehrsätze andere wichtige Lehrsätze erfunden, und durch Hülfe der Buchstaben und Gleichungen dargestellt werden können, und diese Darstellung ist ungleich deutlicher und kürzer als der wörtliche Ausdruck derselben, wovon im 1) Zusatze einige Beyspiele gegeben worden. Hierzu kommt noch der Vortheil, daß man sich einen solchen Lehrsatz, wenn man ihn vergessen hätte, auf eine so leichte Art wieder ins Gedächtniß zurückrufen kann.

Anhang.

Zusatz zum dritten Kapitel.

Die daselbst in [6. 7. und 8.] aufgestellten Gleichungen enthalten die ersten Anfangsgründe der Buchstabenrechnung oder der Art, allgemeine Lehrsätze und Wahrheiten kurz durch Buchstaben und Gleichungen auszudrücken. Die darin vorkommenden Buchstaben können Größen jeder Art bedeuten, nur müssen sie alle gleichartige Größen seyn; z. B. in der Gleichung I in (7.), worin die drey Buchstaben C, D, E vorkommen, kann für C eine Größe jeder Art gesetzt werden; hat man aber dafür eine Größe von einer bestimmten Art, z. B. eine Längengröße gesetzt, so müssen nun für D und E auch Längengrößen angenommen werden. Außerdem muß aber auch, wenn man sich diese Gleichungen durch Beyspiele erläutern, und dabey nicht auf Differenzen kommen will, deren Subtrahend größer als der Minuend ist, und die daselbst noch nicht verstanden werden können,

in (6.)

bey der Gleichung I und III $M > S$

(in (7.)

bey den Gleichungen II, III, IIII $F > D$
. . . V, VI, VII $A > F > E$
bey der Gleichung VIII $F > E$
. . . IX $A > F > D$
. . . X $A > D + E$
. . . XI $F > E$ und $B > F - E$
. . . XII $B > D$ und $F > D$
. . . XIII $A > B, A > F, A < B + F$
. . . XIIII $A > C + E$

in

in (8.)

bey der Gleichung I $A > B \quad C > D$

. . . II $C > D \quad A > B + (C - D)$

angenommen werden. Genau genommen sind diese Gleichungen dort auch nur unter dieser Einschränkung bewiesen worden. Sobald man aber die im eilften Kapitel vorgetragene Addition und Subtraction entgegengesetzter Größen erlernt hat, können, wie auch daselbst bemerkt worden, diese Einschränkungen wegfallen, und für die in gedachten Gleichungen vorkommenden Buchstaben ganz willkührlich positive oder negative Größen angenommen werden.

Zusätze zum achten Kapitel.

Der in (15.) aufgestellte Lehrsatz könnte noch besser und allgemeiner so ausgedrückt werden:

15. Lehrsatz. Wenn zwey Producte aus zwey oder mehreren Factoren $\alpha.\beta.\gamma.\delta\ldots$ und a.b.c.d... relative Primzahlen sind, so giebt auch jeder Factor des einen Productes, z.B. β, mit jedem Factor des andern Productes, z.B. c, verbunden ein Paar relative Primzahlen.

Beweis.

Denn gäbe es eine ganze Zahl größer als 1, von welcher sowohl β, als auch c gemessen würde, so würde nach (9.) von dieser Zahl sowohl $\alpha.\beta.\gamma.\delta\ldots$, als auch a.b.c.d... gemessen; diese Producte wären also nicht relative Primzahlen, wider die Voraussetzung.

1) Zusatz. Zwey um 1 unterschiedene Zahlen sind nothwendig relative Primzahlen. Denn gäbe es eine Zahl größer als 1, von welcher beyde gemessen würden, so würde nach (8.) auch ihr Unterschied, welcher nach der Voraussetzung 1 ist, von dieser Zahl größer als 1 gemessen, welches

nach

nach (2.) unmöglich ist. Sind derowegen zwey Producte aus zwey oder mehrern Factoren um eins unterschieden, so giebt jeder Factor des einen Productes mit jedem Factor des andern Productes verbunden ein Paar relative Primzahlen; oder wenn es von zwo ganzen Zahlen zwey Vielfache giebt, die nur um 1 unterschieden sind, so sind es relative Primzahlen.

Beyspiel. $4.44 - 5.35 = 176 - 175 = 1$ also sind 44 und 35 relative Primzahlen.

2) Zusatz. Eben so sieht man ein, daß, wenn α und a. b. c. d. e... relative Primzahlen sind, auch α und a, α und b, α und c u. s. w. relative Primzahlen seyn müssen.

Ueber die Neunerprobe.

1. Diese besteht darin, daß man die Richtigkeit einer mit mehrziffrigen ganzen Zahlen gemachten Addition, Subtraction und Multiplication dadurch prüft, daß man statt der vielziffrigen Zahlen selbst, blos mit den einziffrigen Zahlen rechnet, die gedachte vielziffrige Zahlen, wenn sie durch 9 dividirt werden, zum Rest übrig lassen, und die hier der Kürze wegen ihre Restzahlen heißen sollen. Man findet selbige nach [VIII. Kap. 17. C)] wenn man alle Ziffern der vielziffrigen Zahl zusammen addirt, im Falle diese Summe eine mehrziffrige Zahl ist, damit dieselbe Operation vornimmt, und damit so lange fortfährt, bis man eine einziffrige Zahl erhält; dieses ist die gesuchte Restzahl. Da z. B. bey der Zahl 6837847753 die Summe ihrer Ziffern 58, bey dieser 13, und hier wieder 4 ist, so ist 4 die Restzahl der erstern vielziffrigen Zahl, oder sie läßt durch 9 dividirt 4 zum Reste. Die Restzahlen 9 und 0 sind einander gleichgültig, und man kann nach Belieben eine für die andere setzen. So ist z. B. bey der Zahl 83763 die Summe der Ziffern 27, hier wieder 9, also ist die Rest-

zahl

zahl der erstern Zahl 9 oder 0, das heißt, sie wird von 9 gemessen. Kommen unter den Ziffern, womit eine mehrziffrige Zahl geschrieben wird, Neuner vor, so kann man diese bey Bestimmung der Restzahl übergehen.

2. Ein Additionsexempel, z. B. folgendes:

684753	(6
392314	(4
58649	(5
3818045	(2
4953761	(8

wird durch die Neunerprobe also geprüft: Man suche nach (1.) zu allen gegebenen Summanden sowohl, als auch zu der gefundenen Summe die zugehörigen Restzahlen, und setze selbige, wie hier geschehen ist, in einer kleinen Klammer daneben zur Rechten. Ist nun die Summe der Restzahlen der Summanden, wenn sie eine einziffrige Zahl ist, selbst, oder, wenn sie eine vielziffrige Zahl ist, ihre Restzahl mit der Restzahl der gefundenen Summe einerley, so trifft die Neunerprobe ein. Hier z. B. ist die Summe der Restzahlen der Summanden $6 + 4 + 5 + 2 = 17$, und da die Restzahl dieser Summe 8 mit der Restzahl der gefundenen Summe übereintrifft, so trifft auch die Neunerprobe ein.

3. Ein Subtractionsexempel, z. B. folgende beyde:

8347957	(7	6487355	(2
4252883	(5	2989941	(6
4095074	(2	3497414	(5

wird durch die Neunerprobe auf ähnliche Art geprüft: Man suche nach (1.) zu dem Minuend, Subtrahend und gefundenen Rest die zugehörigen Restzahlen, und setze selbige, wie auch hier geschehen ist, in einer kleinen Klammer daneben zur Rechten. Ist nun die Restzahl des Minuends nicht kleiner als die des Subtrahends, wie hier beym ersten Bey-

spiele,

spiele, so trifft die Neunerprobe ein, wenn die Restzahl des Subtrahends von der Restzahl des Minuends abgezogen, die Restzahl des gefundenen Rests übrig läßt, wie bey diesem Beyspiele der Fall ist. Ist aber die Restzahl des Minuends kleiner als die des Subtrahends, wie hier beym andern Beyspiele, so trifft die Neunerprobe ein, wenn die Restzahl des Subtrahends von der um 9 vermehrten Restzahl des Minuends abgezogen die Restzahl des gefundenen Restes übrig läßt, welches bey diesem andern Beyspiele wirklich statt findet.

4. Ein Multiplicationsexempel, z. B. folgendes:

```
   3487526  (8
     58379  (5
   --------
  31387734
 24412682
10462578
27900208
17437630
----------
203598280354  (4
```

wird auf die nämliche Art geprüft: Man suche nach (1.) zu den beyden gegebenen Factoren sowohl, als auch zu dem gefundenen Producte die zugehörigen Restzahlen, und setze selbige, wie hier geschehen ist, in einer kleinen Klammer daneben zur Rechten. Ist nun das Product der Restzahlen der Factoren, wenn es eine einziffrige Zahl ist, selbst, oder, wenn es eine vielziffrige Zahl ist, seine Restzahl mit der Restzahl des gefundenen Productes einerley, so trifft die Neunerprobe ein. Hier z. B. ist das Product der Restzahlen der beyden Factoren 5.8 oder 40, und da die Restzahl dieses Productes 4 mit der Restzahl des gefundenen Productes übereintrifft, so trifft auch die Neunerprobe ein.

5. Um ein Divisionsexempel aber durch die Neunerprobe zu prüfen, berechne man nach (1.) die Restzahlen des Di-

Dividends, Divisors, herausgekommenen Quotienten und Restes, und addire zu dem Producte aus der Restzahl des Divisors in die Restzahl des herausgekommenen Quotienten die Restzahl des herausgekommenen Restes. Ist diese Summe, wenn sie eine einziffrige Zahl ist, selbst, wenn sie aber eine zweyziffrige Zahl ist, ihre Restzahl mit der Restzahl des Dividenden einerley, so trifft die Neunerprobe ein. So ist bey dem in [V. Kap. 7. 5) Zus.] angeführten Beyspiele

der Dividend	786394621538	(8
der Divisor	53789	(5
der herausgek. Quotient	14619989	(2
der herausgek. Rest	33217	(7

und die bey diesen Zahlen stattfindenden Restzahlen sind daneben zur Rechten in einer kleinen Klammer, wie vorhin, bemerkt worden. Addirt man nun zu dem Producte aus der Restzahl des Divisors 5 in die Restzahl des gefundenen Quotienten 2, welches 10 ist, die Restzahl des herausgekommenen Restes 7, so erhält man 17, und da die Restzahl davon 8 mit der Restzahl des Dividends einerley ist, so trifft die Neunerprobe ein.

6. Trifft bey einem Exempel die Neunerprobe nicht ein, so ist es gewiß falsch gerechnet; trifft sie aber ein, so kann man zwar daraus noch nicht mit völliger Gewißheit behaupten, daß es richtig gerechnet ist, oder sie ist kein ganz untrügliches Prüfungsmittel; da sie inzwischen bey falsch gerechneten Exempeln nur dann eintreffen kann, wenn man sich gerade um ein Vielfaches von 9 verrechnet hat, und dieses doch nicht gerade immer, sondern nur seltner der Fall ist, so bleibt sie immer ein nicht ganz zu verwerfendes Prüfungsmittel. Ich habe mich derselben bey manchen großen Rechnungen mit vielem Vortheile bedient, und der Fälle, wo sie mich betrog, waren sehr wenig. Noch sicherer wird sie freylich, wenn man sie mit der 99er, 999er u. s. w.

Probe

Probe verbindet, bey welchen statt mit den ganzen vielziffrigen Zahlen, blos mit den Zahlen, die sie durch 99, 999 u. s. w. dividirt übrig lassen, und die nach [VIII. Kap. 17. D) E)] gefunden werden, auf dieselbe Art gerechnet wird; diese Proben sind aber freylich nicht so kurz, wie die Neunerprobe.

Bestimmung der Factoren einer zusammengesetzten Zahl N.

Unter einem Factor von N versteht man jede ganze Zahl, die in N aufgeht, oder ein Maaß von N ist. Sämmtliche Factoren von N findet man dadurch, daß man nach [VIII. Kap. 18.] N in seine einfachen Factoren zerfällt. Jeder Factor von N ist ein Product aus Potenzen aller, in gedachter Zerfällung vorkommenden absoluten Primzahlen, worunter die 0te und 1ste Potenz mit begriffen ist. Die höchste Potenz, zu welcher jede dieser Primzahlen erhoben werden darf, ist diejenige, welche in der gedachten Zerfällung von N vorkommt. Der erste Factor wird gefunden, wenn man jede vorkommende Primzahl mit dem Potenzexponenten 0 ansetzt, und auf die Exponentenfolge jedes vorhergehenden Factors wird die Exponentenfolge des zunächst folgenden nach dieser Regel bestimmt.

1) Ist der Exponent am weitesten zur Rechten noch nicht der höchste, so erhöhe man ihn um 1, lasse aber alle übrigen ungeändert.

2) Ist der Exponent am weitesten zur Rechten der höchste, so suche man von der Rechten nach der Linken den ersten Exponenten auf, der noch nicht der höchste ist, diesen vermehre man um 1, nehme alle zur Rechten folgende Potenzexponenten 0 an, und sind noch zur Linken welche übrig geblieben, so lasse man diese ungeändert.

Auf

Auf diese Art fahre man fort, bis kein Exponent mehr erhöhet werden kann, oder alle Primzahlen zu den höchsten Potenzen erhoben sind.

Beyspiel. Die Zahl sey 2520, so giebt diese in ihre einfachen Factoren zerfällt $2^3.3^2.5^1.7^1$; man findet also alle ihre Factoren auf folgende Art:

$7^0.5^0.3^0.2^0 = 1$	$7^0.5^1.3^1.2^0 = 15$	$7^1.5^0.3^2.2^0 = 63$
$7^0.5^0.3^0.2^1 = 2$	$7^0.5^1.3^1.2^1 = 30$	$7^1.5^0.3^2.2^1 = 126$
$7^0.5^0.3^0.2^2 = 4$	$7^0.5^1.3^1.2^2 = 60$	$7^1.5^0.3^2.2^2 = 252$
$7^0.5^0.3^0.2^3 = 8$	$7^0.5^1.3^1.2^3 = 120$	$7^1.5^0.3^2.2^3 = 504$
$7^0.5^0.3^1.2^0 = 3$	$7^0.5^1.3^2.2^0 = 45$	$7^1.5^1.3^0.2^0 = 35$
$7^0.5^0.3^1.2^1 = 6$	$7^0.5^1.3^2.2^1 = 90$	$7^1.5^1.3^0.2^1 = 70$
$7^0.5^0.3^1.2^2 = 12$	$7^0.5^1.3^2.2^2 = 180$	$7^1.5^1.3^0.2^2 = 140$
$7^0.5^0.3^1.2^3 = 24$	$7^0.5^1.3^2.2^3 = 360$	$7^1.5^1.3^0.2^3 = 280$
$7^0.5^0.3^2.2^0 = 9$	$7^1.5^0.3^0.2^0 = 7$	$7^1.5^1.3^1.2^0 = 105$
$7^0.5^0.3^2.2^1 = 18$	$7^1.5^0.3^0.2^1 = 14$	$7^1.5^1.3^1.2^1 = 210$
$7^0.5^0.3^2.2^2 = 36$	$7^1.5^0.3^0.2^2 = 28$	$7^1.5^1.3^1.2^2 = 420$
$7^0.5^0.3^2.2^3 = 72$	$7^1.5^0.3^0.2^3 = 56$	$7^1.5^1.3^1.2^3 = 840$
$7^0.5^1.3^0.2^0 = 5$	$7^1.5^0.3^1.2^0 = 21$	$7^1.5^1.3^2.2^0 = 315$
$7^0.5^1.3^0.2^1 = 10$	$7^1.5^0.3^1.2^1 = 42$	$7^1.5^1.3^2.2^1 = 630$
$7^0.5^1.3^0.2^2 = 20$	$7^1.5^0.3^1.2^2 = 84$	$7^1.5^1.3^2.2^2 = 1260$
$7^0.5^1.3^0.2^3 = 40$	$7^1.5^0.3^1.2^3 = 168$	$7^1.5^1.3^2.2^3 = 2520$

Die Potenzexponenten bilden hier das, was Hindenburg in seiner Combinationslehre verkürzte Variationsklassen an sich nennet, worüber man vergleichen kann: Lehrbuch der combinatorischen Analysis nach der Theorie des Hrn. Prof. Hindenburg ausgearbeitet von Joh. Christoph Weingärtner. Erster Theil 37. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe durch die Combinationslehre vermittelst der von Weingärtner sogenannten Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen findet man ebendaselbst (63.)

Die

Die Menge der Factoren ist, wenn a, b, c u. s. w. die absoluten Primzahlen bedeuten, die darin als Factoren vorkommen, und die Zahl selbst in ihre einfachen Factoren zerfällt $= a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$ ist, $= (\alpha+1).(\beta+1).(\gamma+1)\ldots$ also z. B. hier $4.3.2.2 = 48$, darunter ist 1, und die Zahl N selbst mit begriffen. Ist N eine absolute Primzahl größer als 1, so hat sie keine andern Factoren als 1 und sich selbst.

Ueber die cyklischen Perioden.

Lehrsatz. I. Wenn zwo verschiedene ganze Zahlen M und N durch einerley Divisor d dividirt einerley Rest übrig lassen, so ist ihr Unterschied ein Vielfaches von d; II. wenn zwo verschiedene Zahlen M und N um ein Vielfaches von d von einander unterschieden sind, so lassen sie durch d dividirt einerley Rest übrig.

Beweis.

Für I. Die Quotienten seyen m und n, und der gemeinschaftliche Rest r, so ist

$$M = m.d + r$$
$$N = n.d + r$$

also wenn $N > M$ nach [III. Kap. 7. 3) Zus.]

$$N - M = (n.d + r) - (m.d + r) = n.d - m.d$$
$$= (n - m).d$$

Für II. Ist $N - M = k.d$ und $M = m.d + r$, so ist nach (III. Kap. 6. I)

$$N = k.d + M = k.d + m.d + r = (k + m).d + r$$

Hieraus ergeben sich folgende Zusätze:

1) Zusatz. Es mögen c, d, e... mehrere verschiedene ganze Zahlen größer als 1, und v ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches bedeuten. Wenn eine ganze Zahl N durch

durch v dividirt φ zum Reste läßt, so lassen auch N und φ durch c, d, e, ... dividirt einerley Reste übrig; denn dann ist φ von N um ein Vielfaches von v, also um ein gemeinschaftliches Vielfaches von c, d, e, ... unterschieden, und es erhellet die Sache aus II.

2) Zusatz. Wenn demnach zwo Zahlen N und M durch v dividirt einerley Rest übrig lassen, oder, welches einerley ist, um ein Vielfaches von v oder überhaupt um ein gemeinschaftliches Vielfaches von c, d, e... unterschieden sind, so lassen sie auch durch c, d, e, ... dividirt einerley Rest.

3) Zusatz. Umgekehrt wenn zwo verschiedene Zahlen M und N durch c, d, e, ... dividirt einerley Reste γ, δ, ε, ... übrig lassen, so ist nach I ihr Unterschied ein gemeinschaftliches Vielfaches von c, d, e, ... oder nach [VIII. Kap. 14.] ein Vielfaches von v, also lassen sie auch nach II durch v dividirt einerley Reste übrig.

4) Zusatz. Giebt es eine Zahl, die durch c, d, e, ... dividirt γ, δ, ε, ... zum Reste läßt, so giebt es auch eine Zahl kleiner als v, die eben die Eigenschaft hat. Denn man dividire diese Zahl durch v, und nenne den übrig bleibenden Rest φ, so ist $\varphi < v$, und läßt nach 1) Zus. durch c, d, e, ... dividirt ebenfalls γ, δ, ε, ... zum Reste.

5) Zusatz. Es kann nicht mehr als eine Zahl kleiner als v geben, die durch c, d, e, ... dividirt bestimmte Reste γ, δ, ε, ... übrig läßt; denn gäbe es deren zwey, so müßte nach 3) Zus. ihr Unterschied ein Vielfaches von v seyn, welches unmöglich ist, wenn beyde kleiner als v sind.

6) Zusatz. Läßt demnach irgend eine ganze Zahl durch v dividirt φ, durch c, d, e, ... dividirt aber γ, δ, ε, ... zum Reste, so ist nach 1) Zus. γ, δ, ε, ... durch φ, oder auch umgekehrt nach 3) Zus. φ durch γ, δ, ε, ... bestimmt.

Aus

Aus der Zahl φ die Zahlen $\gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ zu finden, hat nach 1) Zus. keine Schwierigkeiten, die umgekehrte Aufgabe aber, wenn $\gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ gegeben ist, φ zu finden, ist schwieriger.

7) Zusatz. Geben von den Zahlen c, d, e, ... jede zwo mit einander verbunden ein Paar relative Primzahlen, so ist, wie sich sehr leicht aus [VIII. Kap. 16. 3) Zus. und 22. 3) Zus.] folgern läßt,

$$v = c.d.e\ldots$$

und dann kann die letztere Aufgabe so aufgelöst werden: Man nehme an, der Größen c, d, ... seyen z. B. drey c, d, e, so ist $v = c.d.e$ und

c und d.e
d und c.e
e und c.d

relative Primzahlen; es lassen sich demnach nach [VIII. Kap. 22. 9) Zus.] Zahlen $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ von der Beschaffenheit finden, daß

$$\mathfrak{C}.d.e - \mathfrak{c}.c = 1$$
$$\mathfrak{D}.c.e - \mathfrak{d}.d = 1$$
$$\mathfrak{E}.c.d - \mathfrak{e}.e = 1$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{C}.d.e.\gamma = \mathfrak{c}.c.\gamma + \gamma$$
$$\mathfrak{D}.c.e.\delta = \mathfrak{d}.d.\delta + \delta$$
$$\mathfrak{E}.c.d.\varepsilon = \mathfrak{e}.e.\varepsilon + \varepsilon$$

und es erhellet, daß die Zahl

$$\mathfrak{C}.d.e.\gamma + \mathfrak{D}.c.e.\delta + \mathfrak{E}.c.d.\varepsilon$$

durch c, d, e, dividirt $\gamma, \delta, \varepsilon$ zum Reste läßt. Dividirt man sie also durch v, und setzt den Quotienten p und den Rest φ, so ist

$$\mathfrak{C}.d.e.\gamma + \mathfrak{D}.c.e.\delta + \mathfrak{E}.c.d.\varepsilon = p.v + \varphi$$

und der übrigbleibende Rest φ die verlangte Zahl, oder die einzig mögliche Zahl kleiner als v, die durch c, d, e dividirt $\gamma, \delta, \varepsilon$ zum Reste läßt.

Bey-

Beyspiel. Es sey $c = 15$, $d = 19$, $e = 28$,
so ist

$$\begin{aligned} v &= 15.19.28 = 7980 \\ d.e &= 19.28 = 532 \\ c.e &= 15.28 = 420 \\ c.d &= 15.19 = 285 \end{aligned}$$

und nun findet man nach [VIII. Kap. 22. 9) Zus.]

$$\mathfrak{C} = 13, \quad \mathfrak{D} = 10, \quad \mathfrak{E} = 17,$$

mithin ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}.\,d.e &= 13.532 = 6916 \\ \mathfrak{D}.\,c.e &= 10.420 = 4200 \\ \mathfrak{E}.\,c.d &= 17.285 = 4845 \end{aligned}$$

folglich

$$6916.\gamma + 4200.\delta + 4845.\varepsilon = p.7980 + \varphi$$

Es sey z. B. $\gamma = 5$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 11$, so hat man

$$\begin{aligned} 6916.5 &= 34580 \\ 4200.4 &= 16800 \\ 4845.11 &= 53295 \end{aligned}$$

$$7980)\ \begin{array}{r} 104675 \\ 798.. \\ \hline 2487 \\ 2394. \\ \hline 935 \end{array} \Big| 13 = p \qquad 935 = \varphi$$

also ist 935 die verlangte Zahl, oder die einzig mögliche kleiner als 7980, welche durch 15, 19, 28 dividirt die Reste 5, 4, 11 läßt.

8) Zusatz. Geben aber von den Zahlen c, d, e, ... nicht jede zwo mit einander verbundene ein Paar relative Primzahlen, so ist v kleiner und ein Maaß von c. d. e..., und in diesem Falle ist die Aufgabe nicht einmal für jedes willkührliche γ, δ, ε u. s. w. möglich; so ist es z. B. unmöglich, daß eine und eben dieselbe Zahl durch 20 dividirt 13, und durch 24 dividirt 19 zum Reste geben kann.

9)

9) Zusatz. Sind aber c, d, e... u. s. w. sämmtlich von einander unterschiedene absolute Primzahlen, so tritt der im 7) Zus. betrachtete Fall ein, das heißt, es ist $v = c.d.e...$ und jede Zahl φ, die kleiner als v ist, giebt eine eigene Folge der Größen γ, δ, ε, ... und umgekehrt jede Folge der Größen γ, δ, ε ... giebt ein, aber auch nur ein φ. Da nun jede Zahl, die gegen v relative Primzahl ist, von keiner der Zahlen c, d, e... gemessen werden kann, und umgekehrt jede Zahl, die von keiner der Zahlen c, d, e, ... gemessen wird, nach [VIII. Kap. 5. Zus. und 16. 3) Zus.] gegen v relative Primzahl ist, so erhellet, daß es soviel Zahlen, die kleiner als v, und zugleich gegen v relative Primzahlen sind, geben müsse, als sich Folgen der Größen γ, δ, ε, ... denken lassen, worunter keine Null vorkommt. Diese Menge ist aber, da dann γ nur eine der Zahlen 1, 2, 3... $c-1$; δ nur eine der Zahlen 1, 2, 3... $d-1$; ε nur eine der Zahlen 1, 2, 3... $\varepsilon - 1$ u. s. w. bedeuten kann, offenbar $(c-1)(d-1)(e-1)$ ..... so groß ist also auch die Menge der Zahlen, die kleiner als v oder $c.d.e...$ und zugleich gegen v relative Primzahlen sind.

10) Zusatz. Hieraus erhellet ferner, daß die Menge der Zahlen, die kleiner als $k.v$ oder $k.c.d.e...$ (wo k eine ganze positive Zahl bedeutet) und gegen v oder $c.d.e...$ relative Primzahlen sind, offenbar

$$k.(c-1).(d-1).(e-1)\ldots$$

seyn müsse. Nimmt man also für k die Zahl

$$c^{'\gamma-1}.d^{'\delta-1}.e^{'\varepsilon-1}$$

an, wo $'\gamma$, $'\delta$, $'\varepsilon$, ... ganze positive Zahlen bedeuten, so folgt daraus, daß die Menge der Zahlen, die kleiner als $c^{'\gamma}.d^{'\delta}.e^{'\varepsilon}\ldots$ und gegen $c.d.e\ldots$ relative Primzahlen sind,

$$c^{'\gamma-1}.d^{'\delta-1}.e^{'\varepsilon-1}\ldots(c-1).(d-1).(e-1)\ldots$$
$$= c\;.d^{'\delta}.e^{'\varepsilon}\ldots((1-\tfrac{1}{c})(1-\tfrac{1}{d})(1-\tfrac{1}{e})\ldots$$

seyn

seyn müsse. Jede Zahl aber, die gegen $c.d.e\ldots$ relative Primzahl ist, ist es auch gegen $c^{\gamma}.d^{\delta}.e^{\varepsilon}\ldots$ und umgekehrt jede Zahl, die gegen $c^{\gamma}.d^{\delta}.e^{\varepsilon}\ldots$ relative Primzahl ist, ist es auch gegen $c.d.e\ldots$; es ist derowegen die Menge der Zahlen, die kleiner als $c^{\gamma}.d^{\delta}.e^{\varepsilon}\ldots$ und dagegen relative Primzahlen sind, wenn man der Kürze wegen $c^{\gamma}.d^{\delta}.e^{\varepsilon}\ldots = N$ setzt,

$$N.\frac{c-1}{c}.\frac{d-1}{d}.\frac{e-1}{e}\ldots = N.(1-\tfrac{1}{c}).(1-\tfrac{1}{d}).(1-\tfrac{1}{e})\ldots$$

Da z. B. die Zahl 2520 in ihre einfachen Factoren zerlegt $2^3.3^2.5^1.7^1$ ist, so ist die Menge der Zahlen, die kleiner als sie, und gegen sie relative Primzahlen sind,

$$2520.\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{6}{7} = 576$$

Ueber eine ähnliche Aufgabe.

Aufgabe. Es sind gegeben zwey relative Primzahlen c und d, und eine andere ganze Zahl e, man soll e durch die Summe oder Differenz zweyer Zahlen ausdrücken, wovon die eine ein Vielfaches von c, und die andere ein Vielfaches von d ist.

Auflösung und Beweis.

Da c und d relative Primzahlen sind, so kann man nach [VIII. Kap. 22. 9) Zus.] zwey Zahlen γ und δ von der Beschaffenheit finden, daß

$$\gamma.c - \delta.d = 1$$

Es ist derowegen auch $\gamma.c > \delta.d$, mithin auch

$$\gamma.e.c > \delta.e.d \text{ und}$$

$$\gamma.e.c - \delta.e.d = e$$

Man dividire $\delta.e$ durch c, und setze den herauskommenden Quotienten p und Rest r, so ist

$$\delta.e = p.c + r$$
$$r < c$$

auch $\delta.e$ nicht kleiner als $p.c$, welches man so ausdrücken kann:

$$\delta.e \not< p.c$$

mithin

$$\delta.e.d \not< p.c.d$$

Da aber auch

$$\gamma.e.c > \delta.e.d$$

so ist auch offenbar

$$\gamma.e.c > p.c.d$$

mithin

$$\gamma.e > p.d$$

Da nun nach [III. Kap. 7. 5) Zus. VI] eine Differenz sich nicht ändert, wenn man Minuend und Subtrahend um gleichviel vermindert, so ist auch

$$e = \gamma.e.c - \delta.e.d = (\gamma.e.c - p.c.d) - (\delta.e.d - p.c.d)$$
$$= (\gamma.e - p.d).c - (\delta.e - p.c).d$$
$$= (\gamma.e - p.d).c - r.d$$

und in dieser Gleichung

$$e = (\gamma.e - p.d).c - r.d$$

ist eine Auflösung enthalten, aus welcher sich, wie folgende Beyspiele an bestimmten Zahlen zeigen, unendlich viel andere Auflösungen ableiten lassen. Wir nehmen dabey an, die Zahl e soll durch die Summe oder Differenz zweyer Zahlen ausgedrückt werden, wovon die eine ein Vielfaches von 7 und die andere ein Vielfaches von 17 ist. Nach [VIII. Kap. 22. 9) Zus.] findet man

$$5.7 - 2.17 = 1$$

Es ist derowegen

$$\gamma = 5, \; c = 7, \; \delta = 2, \; d = 17.$$

Er-

Erstes Beyspiel. Es sey $e = 478$, so ist

I. $\gamma . e = 5.478 = 2390$, $\delta . e = 956$, dies durch $c = 7$ dividirt giebt zum Quotienten $p = 136$ und zum Reste $r = 4$, daraus folgt $p.d = 136.17 = 2312$, $\gamma . e - p.d = 2390 - 2312 = 78$, und man hat die erste Auflösungsgleichung

$$A)\ 478 = 78.7 - 4.17$$

II. Da nun nach [III. Kap. 7. 3) Zus. III] eine Differenz sich nicht ändert, wenn man Minuend und Subtrahend um gleichviel vermehrt, so vermehre man bey dieser Differenz Minuend und Subtrahend immer fort um $17.7 = 7.17$ oder das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 7 und 17, und man erhält

$$\begin{aligned} 478 &= 78.\ 7 - \ \ 4.17 \\ &= 95.\ 7 - 11.17 \\ &= 112.7 - 18.17 \\ &= 129.7 - 25.17 \\ &= 146.7 - 32.17 \end{aligned}$$

u. s. w.

Man kann so ins Unendliche fortgehen, und erhält auf diese Art unendlich viel Auflösungen, bey welchen allen e oder 478 durch eine Differenz ausgedrückt wird, wobey der Minuend ein Vielfaches von 7, und der Subtrahend ein Vielfaches von 17 ist. Alle diese unendlich vielen Auflösungen sind in der Gleichung

$$B)\ 478 = (78 + 17.l).7 - (4 + 7.l).17$$

enthalten, wo für l eine jede ganze positive Zahl oder Null gesetzt werden kann, und welche aus der Gleichung A) entsteht, wenn man nach [III. Kap. 7. 3) Zus. III] Minuend und Subtrahend um $7.17.l$ vermehrt.

III. Da aber auch in der Gleichung A) der Minuend 78. 7 größer als 7.17, der Subtrahend 4.17 aber allemal klei-

kleiner ist, so kann man nach [III. Kap. 7. 4) Zus. V] diese Differenz in eine Summe verwandeln, wenn man 7.17 erst vom Minuend 78.7 abzieht, und dann den Subtrahend 4.17 von 7.17 abzieht, und so erhält man die Gleichung

$$\text{C)}\ 478 = 61.7 + 3.17$$

IIII. Da hier der erste Summand 61.7 noch größer als 7.17 ist, so kann man auch nach [III. Kap. 7. 2) Zus. II] den ersten Summanden um 7.17 vermindern, und dagegen den andern um eben soviel vermehren, und dies Verfahren so lange fortsetzen, als es angeht, und erhält dadurch

$$\begin{aligned} 478 &= 61.7 + 3.17 \\ &= 44.7 + 10.17 \\ &= 27.7 + 17.17 \\ &= 10.7 + 24.17 \end{aligned}$$

Weiter kann man hier nicht fortgehen, weil bey der letzten Gleichung der erste Summand kleiner als 7.17 ist, und so hat man 4 Auflösungen, bey denen e oder 478 durch die Summe zweyer Zahlen ausgedrückt wird, wovon die eine ein Vielfaches von 7 und die andere ein Vielfaches von 17 ist.

V. Da bey der letzten Gleichung in IIII

$$\text{D)}\ 478 = 10.7 + 24.17$$

welche durch D) bezeichnet werden mag, der erste Summand 10.7 kleiner als 7.17 ist, so kann man nach [III. Kap. 7. 3) Zus. IIII] diese Summe in eine Differenz verwandeln, deren Minuend gefunden wird, wenn man den letztern Summanden 24.17 um 7.17 vermehrt, und deren Subtrahend herauskommt, wenn man von 7.17 den erstern Summanden 10.7 abzieht, und so findet sich

$$\text{E)}\ 478 = 31.17 - 7.7$$

VI.

VI. Hieraus hat man auf eben die Art wie in II, wenn man Minuend und Subtrahend immer um 7.17 vermehrt,

$$
\begin{aligned}
478 &= 31.17 - 7.7 \\
&= 38.17 - 24.7 \\
&= 45.17 - 41.7 \\
&= 52.17 - 58.7 \\
&= 59.17 - 75.7 \\
&= 66.17 - 92.7
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Man kann so ins Unendliche fortgehen, und erhält auf diese Art unendlich viel Auflösungen, bey denen allen ein Vielfaches von 17 der Minuend, und ein Vielfaches von 7 der Subtrahend ist, und alle diese unendlich vielen Auflösungen sind in der Gleichung

F) $478 = (31 + 7.l).17 - (7 + 17.l).7$

enthalten, wo für l eine jede ganze positive Zahl oder Null gesetzt werden kann, und welche aus der Gleichung E) entsteht, wenn man Minuend und Subtrahend um $7.17.l$ vermehrt.

Zweytes Beyspiel. Es sey $e = 93$, so ist

I. $\gamma.e = 5.93 = 465$, $\delta.e = 2.93 = 186$, dies durch $c = 7$ dividirt giebt zum Quotienten $p = 26$ und Rest $r = 4$, daraus folgt $p.d = 26.17 = 442$, $\gamma.e - p.d = 465 - 442 = 23$, und man hat die erste Auflösungsgleichung

A) $93 = 23.7 - 4.17$

II. Hieraus folgt auf eben die Art wie im vorigen Beyspiele

$$
\begin{aligned}
93 &= 23.7 - 4.17 \\
&= 40.7 - 11.17 \\
&= 57.7 - 18.17 \\
&= 74.7 - 25.17 \\
&= 91.7 - 32.17
\end{aligned}
$$

u. s. w.

all.

allgemein

B) $93 = (23 + 17.l).7 - (4 + 7.l).17$

III. Die Differenz in der Gleichung A) kann man auf eben die Art wie in vorigem Beyspiele in eine Summe verwandeln, und erhält

C) $93 = 6.7 + 3.17$

IIII. Da hier der erste Summand kleiner als 7.17 ist, so kann man nicht, wie in vorigem Beyspiele, den Satz in [III. Kap. 7. 2) Zus. II] anbringen, sondern muß sogleich den Satz in [III. Kap. 7. 3) Zus. IIII] anwenden, und erhält

D) $93 = 10.17 - 11.7$

V. Hieraus hat man auf eben die Art wie in II

$$\begin{aligned} 93 &= 10.17 - 11.7 \\ &= 17.17 - 28.7 \\ &= 24.17 - 45.7 \\ &= 31.17 - 62.7 \\ &= 38.17 - 79.7 \end{aligned}$$

u. s. w.

allgemein

E) $93 = (10 + 7.l).17 - (11 + 17.l).7$

In diesem Beyspiele findet man also auf diesem Wege nur eine Auflösung, wo e oder 93 durch die Summe zweyer Zahlen ausgedrückt wird, wovon die eine ein Vielfaches von 7 und die andere ein Vielfaches von 17 ist.

Drittes Beyspiel. Es sey $e = 95$, so ist

I. $\gamma.e = 5.95 = 475$, $\delta.e = 2.95 = 190$, dies durch $c = 7$ dividirt giebt zum Quotienten $p = 27$ und zum Reste $r = 1$, daraus folgt $p.d = 27.17 = 459$, $\gamma.e - p.d = 475 - 459 = 16$, und man hat die erste Auflösungsgleichung

A) $95 = 16.7 - 1.17$

A)

II. Hieraus folgt auf eben die Art, wie in vorigen Beyspielen

$$\begin{aligned} 95 &= 16.7 - 1.17 \\ &= 33.7 - 8.17 \\ &= 50.7 - 15.17 \\ &= 67.7 - 22.17 \\ &= 84.7 - 29.17 \end{aligned}$$

u. s. w.

allgemein

B) $95 = (16 + 17.l).7 - (1 + 7.l).17$

III. Da bey der Differenz in A) der Minuend kleiner als 7.17 ist, so kann man hier nicht, wie bey den vorigen Beyspielen, diese Differenz nach [III. Kap. 7. 4) Zus. V] in eine Summe verwandeln, sondern man kann dann blos nach [III. Kap. 7. 5) Zus. VII] diese Differenz in eine andere verwandeln, indem man sowohl Minuend als auch Subtrahend von 7.17 abzieht, und erhält dadurch

C) $95 = 6.17 - 1.7$

IIII. Hieraus hat man nun wieder auf eben die Art, wie bey den vorigen Beyspielen,

$$\begin{aligned} 95 &= 6.17 - 1.7 \\ &= 13.17 - 18.7 \\ &= 20.17 - 35.7 \\ &= 27.17 - 52.7 \\ &= 34.17 - 69.7 \\ &= 41.17 - 86.7 \end{aligned}$$

u. s. w.

und allgemein

D) $95 = (6 + 7.l).17 - (1 + 17.l).7$

In diesem Beyspiele findet man also auf diesem Wege gar keine Auflösung, wo e oder 95 durch die Summe zwoer Zahlen ausgedrückt wird, wovon die eine ein Vielfaches von 7 und die andere ein Vielfaches von 17 ist.

1) Zusatz. Außer den angeführten Auflösungen sind keine andern möglich. Denn läßt sich allgemein die Zahl e auf zwey Arten durch eine Differenz ausdrücken, wovon der Minuend ein Vielfaches von c, und der Subtrahend ein Vielfaches von d ist, so seyen diese beyden Ausdrücke

$$e = f.c - g.d$$
$$e = h.c - m.d$$

und es ist

$$f.c - e = g.d$$
$$h.c - e = m.d$$

Ist nun h nicht kleiner als f, und m nicht kleiner als g, so hat man auch

$$h.c - f.c = (h.c - e) - (f.c - e) = m.d - g.d$$

oder

$$(h - f).c = (m - g).d$$

Da nun c und d relative Primzahlen sind, so giebt es nach [VIII. Kap. 16] eine ganze Zahl k von der Beschaffenheit, daß

$$h - f = k.d \qquad m - g = k.c$$

ist. Hieraus folgt

$$h = f + k.d \qquad m = g + k.c$$

also lassen auch (siehe den ersten Lehrsatz der vorigen Betrachtung über die cyklischen Perioden) h und f durch d dividirt einerley Rest übrig, desgleichen lassen auch m und g durch c dividirt einerley Rest übrig, und das ist auch der Fall, wenn $h < f$ und $m < g$ ist.

Um nun dieses auf das erste Beyspiel anzuwenden, so sey allgemein ein Ausdruck der Zahl 478 durch eine Differenz, wovon der Minuend ein Vielfaches von 7 und der Subtrahend ein Vielfaches von 17 ist,

$$478 = h.7 - m.17$$

Nun ist die Gleichung A)

$$478 = 78.7 - 4.17$$

also

also lassen m und 4 durch 7 dividirt einerley Rest übrig, der demnach kein anderer als 4 seyn kann. Es ist derowegen m nicht kleiner als 4, folglich giebt es, wie vorhin gezeigt worden, eine ganze Zahl k von der Beschaffenheit, daß

$$h = 78 + k.17 \qquad m = 4 + k.7$$

Setzt man nun in der Gleichung B) für dieses Beyspiel k statt l, so erhält man

$$478 = (78 + 17.k).7 - (4 + 7.k).17$$

oder

$$478 = h.7 - m.17$$

Dies ist aber die angenommene Gleichung, also ist selbige mit unter der Gleichung B) begriffen. Eben so wird bewiesen, daß allgemein, wenn

$$478 = h.17 - m.7$$

dann

$$h = 31 + k.7 \qquad m = 7 + k.17$$

seyn müsse. Setzt man also in der Gleichung F) für dieses Beyspiel k statt l, so erhält man

$$478 = (31 + 7.k).17 - (7 + 17.k).7$$

oder

$$478 = h.17 - m.7$$

Dies ist aber die angenommene Gleichung, also ist selbige mit unter der Gleichung F) begriffen.

Ist ferner

$$e = f.c + g.d$$
$$e = h.c - m.d$$

so ist

$$g.d = e - f.c$$
$$m.d = h.c - e$$

also

$$h.c - f.c = (h.c - e) + (e - f.c) = m.d + g.d$$

oder

oder

$$(h-f).c = (m+g).d$$

folglich giebt es eine ganze Zahl k von der Beschaffenheit, daß

$$h-f = k.d \qquad m+g = k.c$$

und daraus folgt

$$f = h - k.d \qquad g = k.c - m$$

Um nun dieses auf das erste Beyspiel anzuwenden, so sey allgemein ein Ausdruck der Zahl 478 durch eine Summe zweyer Theile, wovon der eine ein Vielfaches von 7 und der andere ein Vielfaches von 17 ist.

$$478 = f.7 + g.17$$

Nun ist die Gleichung A)

$$478 = 78.7 - 4.17$$

also

$$f = 78 - k.17 \qquad g = k.7 - 4$$

Wegen der ersten Gleichung darf k nicht größer als 4, wegen der andern aber nicht kleiner als 1 seyn, also kann k blos eine von den Zahlen 1, 2, 3, 4 seyn, und diese 4 Werthe geben die vier dort angeführten Auflösungen. Eben so erhellet für das zweyte Beyspiel, daß, wenn man allgemein

$$93 = f.7 + g.17$$

setzt,

$$f = 23 - k17 \qquad g = k.7 - 4$$

seyn müsse. Wegen der ersten Gleichung darf k nicht größer als 1, wegen der andern aber nicht kleiner als 1 seyn, also darf blos k = 1 seyn, und dies giebt die eine dort angeführte Auflösung.

Gäbe es für das dritte Beyspiel eine solche Auflösung, so sey selbige

$$95 = f.7 + g.17$$

und

und es müßte

$$f = 16 - k.17 \qquad g = k.7 - 1$$

seyn. Wegen der ersten Gleichung dürfte k nicht größer als o, wegen der andern aber nicht kleiner als 1 angenommen werden. Dies sind aber Widersprüche, also giebt es dann keine solche Auflösung.

2) Zusatz. Die Menge der Auflösungen, wo e durch die Summe zweyer Zahlen ausgedrückt wird, wovon die eine ein Vielfaches von c, und die andere ein Vielfaches von d ist, ist allemal endlich, und kann so gefunden werden: Man dividire $\gamma . e$ durch d und $\delta . e$ durch c blos auf ganze Zahlen, setze die herauskommenden Quotienten q und p, so ist die Menge dieser möglichen Auflösungen $q - p$. Im Falle $q = p$ ist, giebt es also keine solche Auflösung wie bey dem dritten Beyspiele; dieser Fall kann aber blos eintreten, wenn $e < c.d$ ist, nicht aber umgekehrt, wie das zweyte Beyspiel zeigt.

3) Zusatz. Die angeführte Aufgabe kann im gemeinen Leben bey folgendem Falle ihre Anwendung finden: Es bedeuten P und Q zwo Personen; P ist an Q 478 Kreuzer schuldig, und hat nichts als Siebenkreuzerstücke, Q aber nichts als Siebzehnkreuzerstücke: wie soll die Zahlung geschehen? Die für das erste Beyspiel unter II enthaltenen Gleichungen geben unendlich viel Arten, davon ist folgende die einfachste. P giebt an Q 78 Siebenkreuzerstücke, und läßt sich von Q 4 Siebzehnkreuzerstücke herausgeben. Wäre aber umgekehrt Q an P 478 Kreuzer schuldig, so gäben die in VI enthaltenen Gleichungen unendlich viel Arten, wie die Zahlung geschehen könnte, davon ist folgende die einfachste. Q giebt an P 31 Siebzehner, und läßt sich von P 7 Siebener herausgeben. Sollten aber 478 Kreuzer in Siebenern und Siebzehnern bezahlt werden, so geht dies

nur

nur auf die vier Arten an, die die vier Gleichungen in IIII angeben; die Zahlung kann nämlich geschehen

1) in 61 Siebenern und 3 Siebzehnern
2) in 44 " " 10 " "
3) in 27 " " 17 " "
4) in 10 " " 24 " "

wovon die letzte Art die einfachste ist. Sollten eben so 93 Kreuzer in Siebenern und Siebzehnern bezahlt werden, so geht dies nur auf eine einzige Art an, die die Gleichung in C) für das zweyte Beyspiel angiebt, nämlich in 6 Siebenern und 3 Siebzehnern. Sollten aber 95 Kreuzer in Siebenern und Siebzehnern bezahlt werden, so ist dies unmöglich.

Ueber die gewöhnliche Bezeichnungsart positiver, negativer und entgegengesetzter Größen.

1. Die in gegenwärtigem Lehrbuche gebrauchte Bezeichnungsart positiver, negativer und entgegengesetzter Größen ist von der bisher gebrauchten gewöhnlichen verschieden; die Gründe, die mich zu dieser Abweichung bewogen haben, habe ich in der Vorrede aus einander gesetzt. Um aber doch diejenigen, die sich dieses Lehrbuches bedienen, in den Stand zu setzen, andere mathematische Schriften, in denen die gewöhnliche Bezeichnungsart gebraucht ist, verstehen zu können, so folgt hier eine kurze Erklärung derselben.

2. Positive oder bejahte Größen werden gewöhnlich durch das zur Linken vorgesetzte Additionszeichen +, negative oder verneinte aber durch das zur Linken vorgesetzte Subtractionszeichen — angedeutet. Die positive 3, die also blos durch 3 angedeutet wird, bezeichnet man gewöhnlich durch +3, die negative 3 aber, die hier durch $\overset{*}{3}$ oder $\dot{-}3$ angedeutet wird, bezeichnet man gewöhnlich durch —3.

3. Die Zeichen + und — werden also bey der gewöhnlichen Bezeichnungsart in einem andern Sinne genommen, als in dem vorher erklärten. Denn wollte man, indem man die positive 3 durch + 3 bezeichnet, das Zeichen + in der vorigen Bedeutung nehmen, so hieße das: 3 soll addirt werden, aber wozu? stünde nicht da; also hätte das keinen Sinn. Eben so kann man, wenn man die negative 3 durch — 3 bezeichnet, das Zeichen — nicht in der vorigen Bedeutung nehmen, denn sonst hieße es: 3 soll subtrahirt werden, aber wovon? stünde nicht da; also hätte das ebenfalls keinen Sinn. Die Zeichen + und — werden also dann in einem doppelten Sinne gebraucht: einmal sind sie Zeichen der Addition und Subtracion, das anderemal Zeichen des Positiven und Negativen; man muß daher, wenn sie vorkommen, genau nachsehen, in welchem Sinne sie genommen werden; welches vorzüglich nöthig ist, wenn sie in einem und demselben Ausdrucke, oder in einer und derselben Gleichung, einmal in der einen, das anderemal in der andern Bedeutung gebraucht werden. Wollte man z. B. die in unserer Bezeichnungsart ausgedrückten richtigen Gleichungen:

$$5 - \overset{*}{3} + 2 - 8 + \overset{*}{13} - \overset{*}{15} + 9 = 13$$

$$\overset{*}{6} + \overset{*}{4} - 7 + \overset{*}{18} - \overset{*}{14} - \overset{*}{8} + 9 = \overset{*}{4}$$

in die gewöhnliche übertragen, so würden sie so aussehen:

$$(+5) - (-3) + (+2) - (+8) + (-13) - (-15) + (+9) = +13$$

$$(-6) + (-4) - (+7) + (-18) - (-14) - (-8) + (+9) = -4$$

In diesen Gleichungen nun kommen gleich die Zeichen + und — in beyderley Sinne vor: auf der linken Seite der Gleichheitszeichen nämlich sind sie außerhalb der Klammern das Zeichen der Addition und Subtraction, innerhalb derselben aber das Zeichen des Positiven und Negativen, welches

ches sie auch auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen sind. Nur wenn man bey der Bezeichnung der positiven oder negativen 3 durch +3 und — 3 beyden o zur Linken vorgesetzt denkt, kann man sich die Zeichen + und — als gewöhnliche Additions- und Subtractionszeichen denken; es ist nämlich offenbar o + 3 = 3 oder = der positiven 3 und o — 3 = der negativen 3, oder in unserer Bezeichnung = $\overset{*}{3}$ = $\dot{-}$3.

4. Man pflegt aber auch öfters, ohne es ausdrücklich zu erklären, die Bedeutung der Zeichen + und — noch mehr zu erweitern, und versteht dadurch, daß man einer Größe A zur Linken ein + vorsetzt, oder unter + A das nicht Entgegengesetzte dieser Größe, oder die Größe A selbst, und wenn man einer Größe A zur Linken ein — vorsetzt, so versteht man unter — A das Entgegengesetzte der Größe A, welches wir oben durch $\dot{-}$A bezeichnet haben. Ist derowegen A eine positive Größe, so bedeutet + A ebenfalls dieselbe positive, und — A die entgegengesetzte negative Größe; ist aber A eine negative Größe, so versteht man unter + A dieselbe negative Größe, unter — A aber die entgegengesetzte positive, und so kann demnach der Ausdruck + A etwas Negatives, so wie umgekehrt — A etwas Positives bezeichnen, wenn nämlich A selbst eine negative Größe ist.